



명진교육 쌤의원
임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>> 문제

원 위의 한 점 P에서 세 현 PA, PB, PC 를 긋고 이 세 현 PA, PB, PC 를 각각 지름으로 하는 원 O_A, O_B, O_C 를 그리자. 원 O_B, O_C 의 교점 중 P가 아닌 점을 X, 원 O_C와 O_A 의 교점 중 P가 아닌 점을 Y, 원 O_A와 O_B 의 교점 중 P가 아닌 점을 Z라 하면, 세 점 X, Y, Z가 한 직선 위에 있음을 보여라.

>>>> 임팩트의 강

기하분야의 문제다. 심슨의 정리를 알고 있으면 쉽게 해결된다. 원에 외접하는 사각형이 되기 위한 필요충분조건과 심슨의 정리와 그 역에 대해서 설명한다.

①브라마굽타의 공식(Brahmagupta's Formula)

원에 내접하는 사각형 ABCD의 대각선이 서로 직교할 때, 그 교점 O에서 한 변 BC에 그은 수선 OE의 연장선을 BC의 대변 AD를 이등분한다.

[증명]

∠DBC=∠DAC=θ라고 하자. 그러면 ∠BOE=∠ADO=90°-θ이다. 또, ∠FOD=∠BOE=90°-θ이다. 그러므로 ∠FDO=∠FOD이고, 따라서, DF=OF이다. 즉, F는 직각삼각형 ADO의 외심이므로 AF=DF이다.

②원에 외접하는 사각형

사각형 ABCD가 한 원에 외접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- (1) AB+CD=BC+DA이다. (듀란드의 문제)
- (2) 네 변에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.
- (3) 네 각의 이등분선이 한 점에서 만난다.

[듀란드의 문제의 증명]

사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A와 D의 내각의 이등분선을 그어 그 교점을 O라 하고, O에서 변 AB, BC, CD, DA에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G, H라 하자. 그러면, △AOE≡△AOH (RHA합동)이므로 OE=OH, AE=AH이다. △DOG≡△DOH이므로 OG=OH이다. 만약 OF>OE라면 BF<BE, CF<CG이다. 이때, AD+BC-(AB+CD)=(BE+CG)-(BF+CF)>0이므로 문제의 조건에 모순이다. 만약 OF<OE라면 BF>BE, CF>CG이다. 이때, AD+BC-(AB+CD)=(BE+CG)-(BF+CF)<0이므로 문제의 조건에 모순이다. 따라서, OE=OF=OG=OH이다. 따라서, 한 점 O에서 사각형의 네 변 AB, BC, CD, DA에 이르는 거리가 모두 같으므로, 사각형 ABCD는 점 O를 중심으로 하는 한 원에 외접한다.

③심슨의 정리(Simson's Theorem)

삼각형 ABC의 외접원 위에 있는 임의의 한 점 P에서 삼각형의 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 그러면 F, D, E는 한 직선 위에 있다. 여기서, 직선 FDE를 점 P에 대한 심슨선이라고 한다.

[증명] ∠PDB=∠PEC=∠PFA=90°이므로 P, D, B, F와 P, D, E, C는 각각 한 원 위에 있다. 그러므로 ∠PDF=∠PBF, ∠PDE+∠PCE=180°이다. 또 A, B, P, C가 한 원 위에 있으므로, ∠PBF=∠PCE이다. 따라서, ∠PDE+∠PDF=180°이다. 그러므로 세 점 F, D, E는 한 직선 위에 있다.

④심슨의 정리의 역

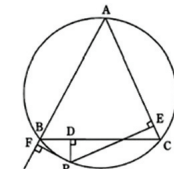
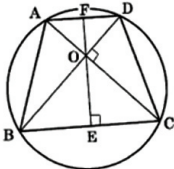
한 점을 지나 삼각형의 세 변에 그은 수선의 발이 한 직선 위에 있으면 그 점은 삼각형의 외접원 위에 있다.

[증명] 위의 그림에서 세 점 F, D, E는 한 직선 위에 있고 P, D, B, F와 P, C, E, D가 각각 한 원 위에 있으므로 ∠BPC=∠BPD+∠DPC=∠BFD+∠AED=180°-∠A이다. 즉, ∠A+∠BPC=180°이다. 그러므로 네 점 A, B, P, C는 한 원 위에 있다. 따라서, P는 삼각형 ABC의 외접원 위에 있다.

>>>> 문제 풀이

∠PXC+∠PXB=180°이므로 B, X, C는 한 직선 위에 있다. 마찬가지로, ∠PYC+∠PYA=180°이므로 A, Y, C도 한 직선 위에 있다. 또, ∠PZA=∠PZB=90°이다. 그러므로 Z, A, B도 한 직선 위에 있다. 즉 X, Y, Z는 각각 점 P에 대한 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB의 수선의 발이다. 따라서 심슨의 정리에 의하여 X, Y, Z는 한 직선 위에 있다.

정답: 증명 (난이도 중)



중등 수학경시 도전하기

>>>> 문제

아래의 절대부등식(네스빗 부등식(Nesbitt's Inequality))을 증명하여라.

양의 실수 a, b, c에 대하여 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ 이다. 단, 등호는 a=b=c일 때 성립한다.

>>>> 임팩트의 강

대수분야의 문제이다. 지난 호에 이어서 산술-기하-조화평균 부등식과 코시-슈바르츠 부등식을 소개한다. 자유자재로 응용할 수 있도록 연습해 두어야 한다. 여타의 다른 절대부등식도 논리적인 전개를 위해서는 필수적이다. 물론 소개하는 모든 절대부등식을 완벽하게 숙지하고 활용하기를 바란다.

①제곱근 역-산술-기하-조화평균 부등식의 확장

양의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대하여 $\max(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \sqrt[n]{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이 성립한다.

즉, $SQM \geq AM \geq GM \geq HM$ 이 성립한다. 등호는 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 일 때 성립한다.

②육십정미 알고리즘

$합S=a_1b_1+\dots+a_nb_n$ 은 두 수열인 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 과 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 이 같은 방법으로 정렬될 경우 최대이고, 반대방법으로 정렬될 경우 즉 하나는 증가하고 하나는 감소할 경우 최소가 된다.

[증명] $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ 이라고 가정하자. 두 합 $S=a_1b_1+\dots+a_nb_1$ 과 $S'=a_1b_1+\dots+a_nb_1+\dots+a_nb_n$ 에서 S의 b_s 와 b_t 를 바꿈으로써 S'을 구할 수 있다. $S'-S=a_sb_s+a_tb_t-a_tb_s-a_sb_t=(a_s-a_t)(b_s-b_t)$ 이고, 따라서, $b_s < b_t$ 이면 $S' < S$ 이고, $b_s > b_t$ 이면 $S' < S$ 이다.

③재배열 부등식

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 이고, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 인 임의의 2n개의 실수에 대하여 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 은 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 을 적당히 재배열하여 얻은 실수들이라 하면, $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1 \leq a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n \leq a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$ 이 성립한다. 등호는 a_i 가 모두 같거나 b_i 가 모두 같을 때 성립한다.

단, $i=1, 2, \dots, n$ 이다.

이 부등식이 의미하는 것은 큰 수끼리 곱하는 경우가 항상 더 크다는 것이다.

④체비셰프 부등식(Chebyshev's Inequality)

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 이고, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 인 임의의 2n개의 실수에 대하여 $a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n) \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1$ 가 성립한다. 등호는 a_i 가 모두 같거나 b_i 가 모두 같을 경우에 성립한다.

단, $i=1, 2, \dots, n$ 이다.

⑤코시-슈바르츠 부등식(Cauchy-Schwartz Inequality)

실수 a, b, x, y에 대하여 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ 이 성립한다.

등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 일 때 성립한다.

[증명] $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=b^2x^2-2abxy+a^2y^2=(bx-ay)^2 \geq 0$ 이다.

등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 일 때 성립한다.

>>>> 문제 풀이

$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) \geq (a+b+c)^2$ 이다. 그런데 $(a+b+c)^2 - \frac{3}{2}(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$ 이다. 따라서, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ 이다. 등호는 a=b=c일 때 성립한다.

정답: 증명 (난이도 중)

>>>> 유사문제1

양의 실수 a, b, c에 대하여 $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 가 성립함을 증명하여라.

>>>> 문제 풀이

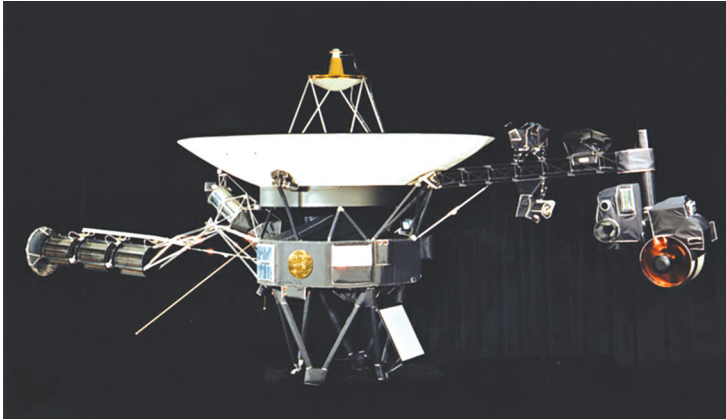
위 부등식은 $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{a} \geq \frac{b}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{b}$ 이므로 성립한다.

정답: 증명 (난이도 하)

일상 속 과학이야기

태양계의 여행자, 보이저1호

1977년 9월 5일, 인류는 목성과 토성, 천왕성, 해왕성의 탐사를 위해 작은 위성을 쏘아 올렸다. 바로 보이저(Voyager) 1호(사진)다. 이름 그대로 여행자란 뜻을 지니고 있는 위성은 아마도 '골드 레코드'로 더 많이 기억되고 있을 것이다. 골드 레코드란 지구의 각종 정보를 담고 있는 레코드판으로 사진과 각국의 언어로 녹음한 인사말, 수학공식, 지구의 위치, 인간에 대한 정보, 클래식 음악 등이 담겨 있다. 만약 보이저 1호가 외계 생명체와 조우할 경우, 지구를 소개하기 위해 제작한 레코드 판인 셈이다. 이 위성이 우주를 여행한지 40년이 되었다. 오늘은 보이저 1호에 대한 이야기를 해볼까 한다.



보이저 1호는 1979년 3월 5일 목성에 가장 가깝게 접근했으며 좋은 해상도를 갖춘 관측 데이터를 얻었다. 이 시기에 목성의 위성과 고리, 목성계의 자장과 방사선 환경에 대해 정보를 얻었고, 약 4월에 촬영을 종료한 뒤 토성을 향해 비행을 시도했다. 1980년 11월 12일에는 토성에 가장 근접했다. 토성의 고리가 1겹이 아닌 복잡한 구조를 가진다는 것을 알아냈고, 토성과 타이탄의 대기 성분을 조사했다. 1986년에는 천왕성에 도착했고, 1989년에는 해왕성을 통과하면서 외행성 조사라는 임무를 다했다.

보이저 1호는 1990년 2월 태양계를 벗어나기 전 지구를 찍은 사진을 전송했다. 약 60억 km 떨어진 우주에서 촬영된 지구는 작은 점으로 보였다. 이 사진은 아마 천문학 사진 중에 가장 유명한 사진이 아닐까 싶다. 칼 세이건의 저서 '창백한 푸른 점'이 바로 그 이름이다. 사실 이 사진은 '가족 사진'이란 프로젝트로 태양계의 행성 사진을 찍는 작업이었다. 지구 사진 역시 그때 찍힌 한 장의 사진이었다. 칼 세이건은 책에 "지구가 광활한 우주에 떠 있는 보잘것없는 존재에 불과함을 사람들에게 가르쳐 주고 싶었다"고 썼다.

보이저 1호는 끝없이 넓은 우주를 향해 지금도 계속 나아가고 있다. 발사된 지 벌써 40년이 되었고, 초속 17km라는 어마어마한 속도로 날아가고 있다. 즉 지금도 지구에서 가장 멀리 보낸 물건이라는 기록을 갱신하고 있다. 2016년 5월을 기준으로 보이저 1호는 지구로부터 약 201억 km 떨어진 지점을 지나고 있다. 태양과 지구의 간격을 1AU라는 단위로 지정했는데 약 134AU에 해당하는 거리다. 우리가 알고 있는 가장 빠른 빛의 속력으로도 19시간을 이동해야 도달할 수 있는 거리다. 그리고 이 거리는 태양계의 경계면을 통과해 미지의 우주로 가고 있음을 의미하기도 한다.

태양계의 경계를 넘어 매일 매일 우리가 분적 없는 미지의 세계로 날아가고 있는 보이저 1호는 이미 예상 수명을 넘어 우주를 비행하고 있다. 많은 학자들은 2030년까지는 지구와 통신할 수 있을 것이라 생각하고 있다. 누군가에겐 우주에 관심을 쏟고, 우주에 값비싼 발사체를 쏘아대는 것이 명칭해 보일 수도 있다. 하지만 단순히 밤하늘의 별자리 신호로 치부하기에는 우주는 너무나 넓고 신비하다. 아마 보이저 1호는 통신이 두절되는 그날까지 인류가 우주와 가까워진 하나의 기록으로 남게 될 것이다.

- 전우람 명진교육 쌤의원 과학집장



7세부터 6학년까지
초등전문 프리미엄 영어 April어학원



융합이 창의성이다 Creative Learning

4차 산업혁명 시대의 주역이 될 우리 아이의 커다란 꿈,
April어학원에서 자신의 꿈을 활짝 펼 수 있는 행복한 창의융합 인재로 키우겠습니다.

April어학원

서울
정담본원 02-511-0511
강남대치 02-572-4105
강남세곡 02-459-7775
강동명일 02-3426-9407
강북미아 02-985-4105

강서 02-2658-9408
관악 02-875-4105
노원송계 02-939-4105
도봉창동 02-990-1605
동대문 02-2214-8324
동작 02-812-4105

마포공덕 02-711-9407
마포상암 02-333-5620
서대문 02-305-5511
서초반포 02-537-4105
서초방배 02-594-9599
송파문정 02-408-9407
송파잠실 02-418-4105
신도림 02-2068-2051
양천목동 02-2642-4105
은평 02-353-4105
중구성동 02-2292-9407

경기,인천
경기구리 031-569-4105
경기평택 031-656-0858
광명철산 02-2612-0579
군포산본 031-393-4105
김포사우 031-996-7905
남양주 031-959-4105
발나 031-574-4105
분당미매 031-701-4105
분당정자 031-698-4105
성남위례 02-6932-4105

수원매탄 031-212-4600
수원영통 031-206-2580
수원장안 031-269-0533
시흥능곡 031-313-0979
안산고잔 031-439-5151
안양평촌 031-387-4105
용인수지 031-261-4505
의정부 031-837-4105
원산대우 031-911-4105
원산화정 031-973-4105
평택안중 031-684-0111

화성동탄1 031-8003-4105
화성동탄2 031-365-4505
화성향남 031-354-0598
인천계양 032-555-9407
인천남동 032-473-9407
인천부평 032-508-5599
인천청라 032-567-9470
송도국제 032-818-4105
부천상동 032-326-4105
부천오정 032-674-5665
부천중동 032-321-4105

강원,대전,충청
강릉 033-648-4488
강원원주 033-766-7686
대전노은 042-710-9407
대전둔산 042-486-9407
대전충청 042-483-9497
대전도농리 042-936-4106
세종 044-867-9407
천안북대 041-552-0594
청주가경 043-239-4105
청주분평 043-285-4105

부산,대구,울산,경상
경남거제 055-635-3553
경남거창 055-944-5803
경남마산 055-232-8800
경남진주 055-748-2957
경남창원 055-263-4501
경북봉곡 054-444-3221
경북봉곡 054-456-3564
경북영주 054-705-4105
김해삼계 055-723-4105
김해장유 055-724-4105

대구범어 053-741-4105
대구상인 053-637-4105
대구시지 053-793-4105
서대구 053-523-4105
부산거제 051-517-4105
부산광안 051-623-4105
부산동래 051-711-4105
부산명지 051-928-4105
부산사하 051-291-4105
부산진 051-893-4105
부산해운대 051-746-4105

부산화명 051-365-4105
울산옥동 052-268-4105
포항남구 054-275-4105
포항북구 054-256-4105
광주,전라,제주
광주광산 062-710-0552
광주상무 062-382-9408
전남순천 061-723-9407
전남여수 061-651-0579
전주호성 063-224-9407
제주노형 064-749-9408

중국
구베이, 신천지, 왕리, 왕징,
닝보인조우, 청도, 황연
베트남
하노이 84-97-246-1000
랑하, 김리엔, 황다오우이,
전꾸, 황위박비엔, 레다이엔,

미러플라자, 투이꾸에, 올웁센,
단공, 전홍다오, 리쯔영가엥,
썬2/T3타일즈시티, 레독토,
꾸언호아, 꾸언쑤, 응오꾸엔,
레홍퐁, 하이바쑤, 광호아,
판반쯔이, 소롱웬웨이엔,
판쑤쑤, 삽하우스사이공펑

www.chungdahm.com