

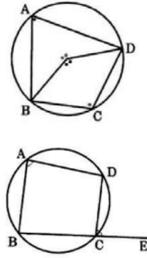


명진교육 쌤학원  
임경원 부원장의

# 상위 1% 수학

## 영재고 도전하기

>>>> **문제**  
 $\angle A=72^\circ$ 인 삼각형 ABC의 내부의 점 M에 대하여  $\angle BMC=148^\circ$ 이다. 점 M에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때,  $\angle FDE$ 의 크기는 얼마인가?  
 >>>> **임팩트의 강의**  
 기하분야의 문제이다. 원에 내접하는 사각형의 필요충분조건을 이해하고 문제에 적용할 수 있도록 숙지해야 한다. 특히 톨레미의 정리는 매우 중요하므로 반드시 익혀야 한다.  
 ① 사각형의 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 내대각이라고 한다.  
 ② 원에 내접하는 사각형  
 사각형 ABCD가 한 원에 내접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.  
 (1) 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은  $180^\circ$ 이다.  
 (2) 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다.  
 (3) 임의의 한 변에서, 나머지 두 점을 바라보는 각이 같다. 변 AB에서 점 C를 바라보는 각이  $\angle ACB$ , 점 D를 바라보는 각이  $\angle ADB$ 라고 할 때,  $\angle ACB = \angle ADB$ 이다.  
 (4) 두 대각선의 교점을 P라고 하면  $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ 이다.  
 (5) 두 대변 AD와 BC(또는 AB와 CD)의 연장선의 교점을 P라 할 때,  $PA \cdot PD = PB \cdot PC$  또는  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 이다.  
 (6) 네 꼭짓점에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.  
 (7) 네 변에 수직이등분선이 한 점에서 만난다.  
 (8) (톨레미의 정리)  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ 이다.  
 ③ 증명 : 증명은 (1)과 (2)의 증명을 아래와 같다. (3), (4), (5)의 증명은 중심각과 원주각의 성질, 방벽의 원리를 이용하면 된다. (6), (7)은 원에 내접하는 사각형의 정의를 이용하면 된다. (8)은 톨레미정리의 증명은 아래의 문제로 남겨둔다.



(1)  $\square ABCD$ 에서  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 라 하고, 세 점 A, B, C를 지나는 원 O 위에 점 D'를 잡는다.  $\square ABCD'$ 은 원 O에 내접하는 사각형이므로  $\angle B + \angle D' = 180^\circ$ 이다. 따라서,  $\angle D = \angle D'$ 이다. 호 AB에 대한 원주각의 크기가 같으므로 D는 원 O 위에 있다. 따라서,  $\square ABCD$ 는 원에 내접한다. 역의 증명은 원 주각과 중심각의 성질에 의하여 쉽게 증명된다.  
 (2)  $\square ABCD$ 에서  $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ ,  $\angle A = \angle DCE$ (내대각)이므로  $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$ 이다. 즉, 한 쌍의 대각의 크기의 합이  $180^\circ$ 이다. 즉, 한 쌍의 대각의 크기의 합이  $180^\circ$ 이므로 (1)에 의하여  $\square ABCD$ 는 원에 내접한다. 역의 증명은 위와 같이 직접 해본다.

>>>> **문제 풀이**  
 사각형 FBDM과 ECDM은 대각의 합이  $180^\circ$ 이므로 원에 내접하는 사각형들이다. 그러므로,  $\angle FDE = \angle FDM + \angle EDM = \angle FBM + \angle ECM = (\angle ABC - \angle MBC) + (\angle ACB - \angle MCB) = (\angle ABC + \angle ACB) - (\angle MBC + \angle MCB) = (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle BMC)$   
 가 되고, 이것을 계산하면,  $\angle FDE = 76^\circ$ 이다. **정답:  $76^\circ$  (난이도 중)**

>>>> **유사 문제**  
 톨레미의 정리(Ptolemy's Theorem)  
 원에 내접하는 사각형 ABCD의 대변의 길이의 곱을 합한 것은 대각선의 길이의 곱과 같다. 즉,  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ 가 성립한다. 톨레미의 정리를 증명하여라.

>>>> **문제 풀이**  
 BD위의 한 점 E가  $\angle BAE = \angle CAD$ 를 만족한다고 하자. 그러면, 호 AD에 대한 원 주각의 성질에 의하여  $\angle ABE = \angle ACD$ 이다. 따라서,  $\triangle ABE$ 와  $\triangle ACD$ 가 닮음이다.  $AB \cdot CD = AC \cdot BE$  (1)이다.  
 또한,  $\angle EAD = \angle CAD + \angle EAC = \angle BAC$ , 호 AB에 대한 원주각의 성질에 의하여  $\angle BCA = \angle ADB = \angle ADE$ 이다. 따라서,  $\triangle ADE$ 와  $\triangle ACB$ 는 닮음이다.  $AD \cdot BC = AC \cdot DE$  (2)이다. 식 (1), (2)를 변형시키면  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + DE) = AC \cdot BD$ 이다. **정답: 증명 (난이도 상)**

## 중등 수학경시 도전하기

>>>> **문제**  
 방정식  $m^3 = n^3 + 2n^2 + m^2 + 7$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍  $(m, n)$ 을 모두  $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_k, n_k)$ 라 할 때,  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ 를 구하여라.  
 >>>> **임팩트의 강의**  
 정수론 분야의 문제이다. 지난 호에 이어서 부정방정식의 해법이다. 접근 방법이 다양한 만큼 여러 가지 문제 유형 분석과 훈련이 필수적이다.  
 ① 무한감항법  
 방정식의 좌변과 우변이 짝수밖에 나올 수 없다는 사실로부터 약분을 무한번 하여도 계속해서 짝수가 나와야 하므로 결국 답은 0밖에 없다는 것을 보이는 방법이다.  
 ② 부등식의 영역을 이용하는 방법  
 부등식의 성질을 이용하여 한 변수에 대하여 범위를 좁혀, 주어진 부정방정식의 해를 찾는다.

>>>> **문제 풀이**  
 $m^3 = n^3 + 2n^2 + m^2 + 7$ 을  $m^3 - n^3 = 2n^2 + m^2 + 7$ 로 변형하고,  $m, n$ 에 대한 부등식을 생각하자.  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ 에서 해가 존재하지 않으므로,  $m > 2, n > 2$ 인 범위에서 살펴보자.  
 $m^3 - n^3 > 0, (m-1)^3 < m^3 - m^2 = n^3 + 2n^2 + 7 < (n+1)^3$   
 이므로,  $n < m, m-1 < n-1$ 임을 알 수 있다. 따라서,  $m = n+1$ 만 가능하다. 이식을  $m^3 - n^3 = 2n^2 + m^2 + 7$ 에 대입하여 정리하면,  $n=7, m=8$ 을 얻는다. 따라서, 방정식  $m^3 = n^3 + 2n^2 + m^2 + 7$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍은  $(m, n) = (8, 7)$ 뿐이다. 구하는 답은 8이다. **정답: 8 (난이도 중)**

>>>> **유사 문제**  
 $\frac{x^2+y}{y^2-x} + \frac{y^2+x}{x^2-y}$ 가 모두 정수가 되는 양의 정수해 순서쌍  $(x, y)$ 를 모두 구하여라.  
 >>>> **문제 풀이**  
 대칭성의 원리에 의하여  $x \geq y$ 라고 두자. 그런데,  $x > y+1$ 이면  $x^2 - y > (y+1)x - y = x^2 - y^2 + x - y > y^2 + x$ 이므로 모순이다. 따라서,  $x = y$  또는  $x = y+1$ 만 가능하다.  
 (i)  $x = y$ 일 때,  $\frac{x+1}{x-1}$ 이 정수가 되어야 하므로  $(x, y) = (2, 2), (3, 3)$ 이다.  
 (ii)  $x = y+1$ 일 때,  $\frac{x^2+y}{y^2-x} = \frac{y^2+3y+1}{y^2-y-1} = 1 + \frac{4y+2}{y^2-y-1}$ 이 정수이다. 그러므로,  $y=1$ 이면,  $\frac{4y+2}{y^2-y-1} = -6$ 이 되어 성립한다. 또한  $y \geq 2$ 이면,  $4y+2 \geq y^2 - y - 1$ 이므로,  $y=2, 3, 4, 5$ 이다. 이를 주어진 식에 대입하면,  $y=2$ 일 때만 해가 된다. 즉,  $(x, y) = (3, 2)$ 이다.  
 $x < y$ 인 경우에도 살펴보면 대칭성의 원리에 의하여  $(x, y) = (2, 3)$ 가 해가 됨을 알 수 있다. 따라서, 주어진 방정식의 양의 정수해 순서쌍  $(x, y) = (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)$ 이다. **정답:  $(x, y) = (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)$  (난이도 상)**

>>>> **유사 문제**  
 $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ 를 만족하는 정수해의 순서쌍  $(x, y)$ 를 모두 구하여라.  
 >>>> **문제 풀이**  
 주어진 식을 변형하면  $y^2 = (x^2+8x)(x^2+8x+7)$ 을 얻는다.  $x^2+8x = a$ 라 놓으면 주어진 방정식은  $y^2 = a^2+7a$ 이다.  $a > 9$ 라 가정하자. 그러면  $(a+3)^2 = a^2+6a+9 < a^2+7a = y^2 < a^2+8a+16 = (a+4)^2$ 이고,  $a+3, y, a+4$ 가 모두 정수이므로 위의 부등식으로부터  $|a+3| < |y| < |a+4|$ 를 얻고 이것은 모순이다. 따라서,  $a \leq 9$ 이다. 즉  $x^2+8x \leq 9$ 이고,  $(x+4)^2 = x^2+8x+16 \leq 25$ 이다. 그러므로,  $-9 \leq x \leq 1$ 이다. 이를 주어진 방정식에 대입하여 정수  $y$ 를 구하면 된다. 따라서, 주어진 방정식을 만족하는 정수해의 순서쌍  $(x, y) = (-9, \pm 12), (-8, 0), (-7, 0), (-4, \pm 12), (-1, 0), (0, 0), (1, \pm 12)$ 이다. **정답:  $(x, y) = (-9, \pm 12), (-8, 0), (-7, 0), (-4, \pm 12), (-1, 0), (0, 0), (1, \pm 12)$  (난이도 중)**

## 일상 속 과학이야기

### 이안류로 보는 파도

최근 해운대 해수욕장에서 사람들이 바다 쪽으로 쓸려가는 파도인 이안류가 발생했다. 우리가 생각하는 보통의 파도는 먼 바다에서 해안으로 들어오는 형태로 발생하지만 이안류는 반대로 해안에서 멀어지는 파도를 말한다. 보통 이안류가 발생하면 사람들은 얕은 바다에서 물놀이를 즐기다 갑자기 생성된 파도에 휩쓸려 해안선으로부터 먼 깊은 바다로 순식간에 끌려 나가게 된다. 다행히 우리나라에선 구조요원들의 활약으로 인명피해가 적은 편이지만 외국에선 매년 수십 명의 사망자가 발생하는 위험한 파도이다.



해운대 이안류 발생 모습 (좌) 대진일보 DB

파도의 속도를 결정하는 가장 중요한 요인은 수심이다. 수심이 깊으면 파도의 속력이 빨라지게 되고 수심이 얕으면 파도의 속력이 느려지게 된다. 해안가로 평행하게 들어오 해운대 이안류 발생 모습 (우) 대진일보 DB는 파도는 수심이 얕은 쪽으로 모이게 되고 수심이 얕은 쪽에서 하나로 모인 파도는 외해로 흘러 나가는 흐름을 만들어 낸다. 그런데 외해로 가면 갈수록 수심이 깊어지기 때문에 파도의 속도가 증가하게 되고 우리는 외해로 빠져나가는 흐름을 이안류라고 부르는 것이다.

파도는 대부분 바람에 의해 형성된다. 하지만 우리의 뇌리에 강하게 남아있는 파도는 바로 해일이다. 각종 재난영화에서 단골 소재로 사용되고 있는 해일은 파도가 높은 파도를 뜻하는데 발생원인에 따라 폭풍해일과 지진해일로 구분된다. 지진해일이란 이름보다는 쓰나미란 이름이 더 친숙할 것이다. 우리나라에서는 쓰나미보다는 폭풍해일이 더 자주 관찰되는데 여름철마다 발생하는 태풍의 영향 때문이다.

폭풍해일이란 태풍과 같은 저기압인 지역에서 나타난다. 저기압인 지역은 상승기류가 활발하게 발생하기 때문에 기압이 주변보다 낮아서 해수면이 상승되어 있다. 이 상승된 해수면은 보통 태풍이나 저기압의 중심부와 같이 이동하게 된다. 이렇게 높아진 해수면에 강한 바람으로 인해 높은 파도를 형성되고 이 높은 파도가 육지로 진입하면서 낮은 지대를 포함한 거주 지역에 피해를 입히는 경우가 생기게 된다. 폭풍해일은 해수면이 높은 밀물 때와 동시에 발생하게 되면 더 큰 피해를 입을 수 있다.

바람에 의한 폭풍해일과는 다르게 지진해일인 쓰나미는 지층이 끊어지는 단층에 의해 발생하게 된다. 바다 속 지층이 끊어지면 많은 양의 에너지가 방출되고 주변의 바다에 큰 파동을 만들어 낸다. 이 큰 파동은 물속을 진행할 때는 해수면 위에 전혀 변화가 없어 보이지만 해안에 가까워지며 수심이 얕은 지역으로 들어오게 되면 막대한 양의 에너지가 수면 위로 올라오면서 엄청난 높이의 파도를 만들어 낸다. 이 파도의 위력은 실제로 엄청나다. 우리가 알고 있는 2004년 인도네시아 근해의 지진으로 발생했던 쓰나미와 가까운 일본의 2011년 일본 후쿠시마 원전사고역시 쓰나미로 인해 전원이 중단되면서 발생한 사고이고 이 지진해일로 인해 4만 명 이상이 목숨을 잃고 35만 명의 이재민이 발생하기도 했다.

이번 해운대 이안류 사건 역시 이안류 발생이 의심되어 입수를 제한했었지만 많은 사람들의 민원으로 인해 입수 제한을 해제하면서 발생한 사건이라고 한다. 지진이 발생할 때 마다 우리나라에 쓰나미가 올 수 있는 확률을 계산하고 경보를 준비하는 것도 이안류로 인해 불편하더라도 입수를 제한하는 것도 언제나 우리의 안전을 위해서 노력하는 이들이 있기 때문이다. 가끔은 불편하더라도 그들의 목소리에 귀를 기울여야 한다. 혹시 그 사건이 우리에게 일어날 수 있기 때문이다.



전우래 쌤학원 과학팀장



7세부터 6학년까지  
초등전문 프리미엄 영어 April 어학원



## 융합이 창의성이다 Creative Learning

4차 산업혁명 시대의 주역이 될 우리 아이의 커다란 꿈, April 어학원에서 자신의 꿈을 활짝 펼 수 있는 행복한 창의융합 인재로 키우겠습니다.

### 여름학기 개강

## April 어학원

- |   |   |  |  |  |  |   |  |  |   |
|---|---|--|--|--|--|---|--|--|---|
| 서울<br>청담본원 02-511-0511<br>강남대치 02-572-4105<br>강남재곡 02-459-7775<br>강동명일 02-3426-9407<br>강북미아 02-985-4105 | 강서 02-2658-9408<br>관악 02-875-4105<br>노원중계 02-939-4105<br>노원장동 02-990-1605<br>동대문 02-2214-8324<br>동작 02-812-4105 | 경기.인천<br>경기구리 031-569-4105<br>경기평택 031-656-0858<br>광명철산 02-2612-0579<br>군포산본 031-393-4105<br>김포사우 031-996-7905<br>남양주 031-959-4105<br>남내 031-574-4105<br>분당미애 031-701-4105<br>분당정자 031-698-4105<br>성남위례 02-6932-4105 | 수원매탄 031-212-4600<br>수원영통 031-206-2580<br>수원장안 031-269-0533<br>시흥남곡 031-313-0979<br>안산고잔 031-439-5151<br>안양평촌 031-387-4105<br>용인수지 031-261-4505<br>의정부 031-837-4105<br>일산대화 031-911-4105<br>일산화정 031-973-4105<br>평택안중 031-684-0111 | 화성동탄1 031-8003-4105<br>화성동탄2 031-365-4505<br>화성향남 031-354-0598<br>인천계양 032-555-9407<br>인천남동 032-473-9407<br>인천부평 032-508-5599<br>인천청라 032-567-9470<br>인천송도 032-818-4105<br>부천상동 032-326-4105<br>부천오정 032-674-5665<br>부천중동 032-321-4105 | 강원.대전.충청<br>강릉 033-648-4488<br>강릉원주 033-766-7686<br>대전노은 042-710-9407<br>대전도산 042-486-9407<br>대전단방 042-483-9497<br>대전대저 042-936-4106<br>세종 044-867-9407<br>천안북대 041-552-0594<br>청주가경 043-239-4105<br>청주평평 043-285-4105 | 부산.대구.울산.경상<br>경남거제 055-635-3553<br>경남거창 055-944-5803<br>경남마산 055-232-8800<br>경남진주 055-748-2957<br>경남창원 055-263-4501<br>경북봉곡 054-444-3221<br>경북송정 054-456-3564<br>경북옥계 054-705-4105<br>김해시경 055-723-4105<br>김해장유 055-724-4105 | 대구범어 053-741-4105<br>대구상인 053-637-4105<br>대구시지 053-793-4105<br>서대구 053-523-4105<br>부산기계 051-517-4105<br>부산광안 051-623-4105<br>부산동래 051-711-4105<br>부산명지 051-928-4105<br>부산사하 051-291-4105<br>부산진 051-893-4105<br>부산해운대 051-746-4105 | 부산화명 051-365-4105<br>울산옥동 052-268-4105<br>포항남구 054-275-4105<br>포항북구 054-256-4105<br>광주.전라.제주<br>광주광산 062-710-0552<br>광주상무 062-382-9408<br>전남순천 061-723-9407<br>전남여수 061-651-0579<br>전주호주 063-224-9407<br>제주노형 064-749-9408 | 충북<br>구베미, 신천지, 왕리, 왕정, 남보인조우, 청도, 황연<br>베트남<br>하노이 84-97-246-1000<br>랑하, 캄리엔, 황다오푸이, 전푸, 황위악비엣, 레다이엔,<br>미얀마<br>다낭, 현홍다오, 리트엣기엣, 쩐/73타일즈시티, 레독토, 구언호, 구영동, 응우구엔, 레홍풍, 하이바중, 광호아, 판반찌이, 소롱웨이엣만, 판씨롱, 삼하우스사이공별 |
|---|---|--|--|--|--|---|--|--|---|