명진교육 쌤학원
임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>>> 문 제

원에 내접하는 삼각형 $A_1A_2A_3$에서 $\angle A_1=30°$, $\angle A_2=70°$, $\angle A_3=80°$이다. 변 A_2A_3의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_1에 가까운 것을 B_1, 변 A_3A_1의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_2에 가까운 것을 B_2, 변 A_1A_2의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_3에 가까운 것을 B_3라고 하자. 삼각형 $B_1B_2B_3$의 세 각 중에서 가장 큰 것은 몇 도인가?

>>>>> 임쌤의 강의

기하 분야의 문제이다. 원 문제, 특히 각에 대한 문제가 나오면 반드시 고려해야 하는 원주각 문제이다. 원주각의 기본 성질과 증명을 소개한다.

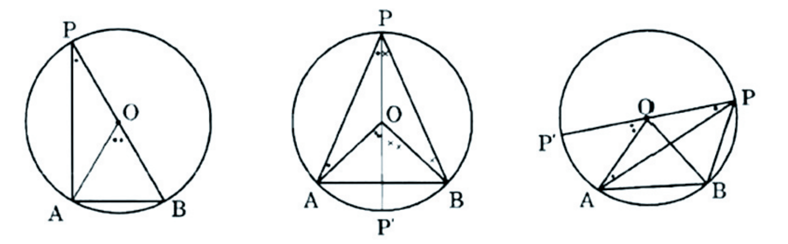
①원주각과 중심각 사이의 관계

한 원에서 원주각과 중심각 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) 한 원에서 주어진 호(또는 현) 위의 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

(2) 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다. 또, 역은 성립한다.

②증명



(1)중심 O가 삼각형 APB의 변 위에 있을 때, 내부에 있을 때, 외부에 있을 때로 나누어 생각하자.

(ⅰ) $\triangle APB$의 변 위에 중심 O가 있을 때, $\triangle BOP$는 이등변 삼각형이므로 $\angle APO=\angle PAO$이다. 또, $\angle AOB=\angle APB+\angle PAO=2\angle APB$이다.

따라서, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

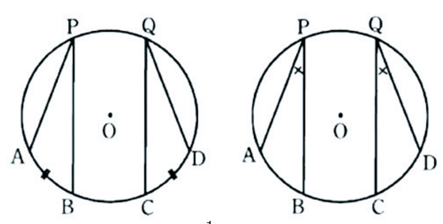
(ⅱ) $\triangle APB$의 내부에 중심 O가 있을 때, PO의 연장선과 원 O와의 교점을 P′이라 고 하면 (ⅰ)에 의하여 $\angle APP'=\frac{1}{2}\angle AOP'$, $\angle BPP'=\frac{1}{2}\angle BOP'$이다.

따라서, $\angle APB=\angle APP'+\angle BPP'=\frac{1}{2}(\angle AOP'+\angle BOP')=\frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.

(ⅲ) $\triangle APB$의 외부에 중심 O가 있을 때, PO의 연장선과 원 O와의 교점을 P′이라 고 하면 (ⅰ)에 의하여 $\angle P'PA=\frac{1}{2}\angle P'OA$, $\angle P'PB=\frac{1}{2}\angle P'OB$이다.

따라서, $\angle APB=\angle P'PB-\angle P'PA=\frac{1}{2}(\angle P'OB-\angle P'OA)=\frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.

따라서, 식 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.



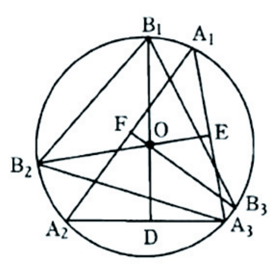
(2) $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD$이고 호 AB와 호 CD가 같으므로, $\angle AOB=\angle COD$이다. 따라서, $\angle APB=\angle CQD$이다. 즉 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

(역의 증명)

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD$이고, $\angle APB=\angle CQD$이므로

$\angle AOB=\angle COD$이다. 따라서, 호 AB와 호 CD는 같다. 즉, 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

>>>>> 문 제 풀 이



변 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2의 수직이등분선과의 변과의 교점을 각각 D, E, F라 하자. $OE\perp A_1A_2$, $OD\perp A_2A_3$이므로 네 점 O, D, A_3, E는 한 원 위에 있고, $\angle DOE=100°$가 된다.

맞꼭지각인 $\angle B_1OB_2=100°$이므로 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle B_1B_3B_2=50°$이다. 마찬가지 방법으로 $\angle B_1=75°$, $\angle B_2=55°$이다. 따라서, 가장 큰 각은 $75°$이다. 정답: 75(난이도 중)

중등 수학경시 도전하기

>>>>> 문 제

일차합동식 $3x\equiv 7 \pmod 4$를 풀어라.

>>>>> 임쌤의 강의

정수론 분야의 문제이다. 일차합동식 $ax\equiv b \pmod m$의 해가 존재하는 필요충분조건과 방정식의 해법에 대해서 알아본다. 일차합동식의 풀이법은 디오판틴 방정식, 유클리드 호제법, 잉여역수 이용하는 방법이 있다.

①$d=\gcd(a, m)$일 때, 일차합동식 $ax\equiv b \pmod m$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $d\nmid b$ 이면, 일차합동식은 정수해를 갖지 않는다.

(2) $d\mid b$이면, 법 m에 대하여 정확하게 d개의 서로 다른 해를 갖는다.

증명 (1) 방정식 $ax+my=b$에서, $\gcd(a, m)=d\mid ax+my=b$이므로 $d\mid b$이다. 그런데, 가정에서 $d\nmid b$에 모순된다. 따라서, 주어진 방정식의 해는 존재하지 않는다.

(2) 방정식 $ax+my=b$의 한 해를 x_0, y_0라 하면, 일반해는 임의의 $k\in Z$에 대하여 $x_k=x_0+\frac{mk}{d}$, $y_k=y_0-\frac{ak}{d}$ 꼴이다.

이 때, x_k 가 바로 $ax\equiv b \pmod m$를 만족시키는 모든 정수들이다. 임의의 k를 d로 나누면, $k=qd+r(0\leqq r<d)$꼴이 되므로 $x_k\equiv x_0+\frac{m(qd+r)}{d}\equiv x_0+\frac{mr}{d}\equiv x_r \pmod m$이다.

그러므로 모든 x_k는 각각 $x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}$ 중 하나와 법 m에 대하여 합동이다.

한편, $0\leqq i, j\leqq d-1$, $x_i\equiv x_j \pmod m$이면 $\frac{im}{d}\equiv\frac{jm}{d} \pmod m$이다.

$\gcd\left(\frac{m}{d}, m\right)=\frac{m}{d}$이므로, 정리 합동식의 기본성질에 의하여, $i\equiv j \pmod m$이다.

따라서, $x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}$은 모두 법 m에 대하여 합동이 아니다.

②정수 a, b, m에 대하여 $d=\gcd(a, b, m)$일 때, 일차합동식 $ax+by=c \pmod m$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $d\mid c$이면 주어진 일차합동식은 정수해를 갖지 않는다.

(2) $d\nmid c$이면 주어진 일차합동식은 법 m에 대하여 정확하게 md개의 서로 다른 해를 갖는다.

>>>>> 문 제 풀 이

풀이 1 : 일차 디오판틴 방정식 이용

$3x\equiv 7 \pmod 4$이므로, 적당한 y에 대하여 $3x+4y=7$이다.

$x_0=1$, $y=1$은 한 해(특이해)이다. $\gcd(3, 4)=1$이므로 일반해는 $x=1+4t$, $y=1-3t$이다. 우리가 구하는 것은 x와 관련된 것이므로 $x\equiv 1 \pmod 4$이다.

풀이 2 : 유클리드 호제법 이용

$\gcd(3, 4)=1$이므로, 3과 4의 일차결합이 1과 같다. 실제로, $(-1)\cdot 3+1\cdot 4=1$이다.

이 사실은 우리에게 $1\cdot x$를 얻기 위하여 x의 계수를 조작할 수 있음을 암시한다.

즉, $4x\equiv 0 \pmod 4$

$-3x\equiv 7 \pmod 4$

$x\equiv 1 \pmod 4$이다.

풀이 3 :잉여역수 이용

법 4에 대한 곱셈표는 오른쪽과 같다.

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

표에서 보듯이 $3\cdot 3\equiv 1 \pmod 4$이다.

따라서, 3을 주어진 합동식에 곱하면

$3x\equiv 7 \pmod 4$, $x\equiv 21\equiv 1 \pmod 4$ 이다. 정답: $x\equiv 1 \pmod 4$(난이도 중)

>>>>> 유 사 문 제

일차합동식 $2x+6y\equiv 4 \pmod{10}$을 풀어라.

>>>>> 문 제 풀 이

$\gcd(2, 6, 10)=2\mid 4$ 이므로, 법 10에 대하여, $2\cdot 10=20$개의 해가 존재한다. 주어진 일차합동식을 디오판틴 방정식으로 변형하자. 즉, 적당한 z에 대하여, $2x+6y+10z=4$이다.

$w=x+3y$라고 하자. 그러면 $w+5z=2$이 되고,

위 부정방정식은 $w_0=-3$, $z_0=1$을 한 해(특이해)로 갖는다. 일반해는 $w=-3+5s$, $z=1-s$이다. 이것을 원래 디오판틴 방정식에 대입하면, $x+3y=-3+5s$이다.

$x_0=5s$, $y_0=-1$을 특이해로 갖는다. 일반해는 $x=5s+3t$, $y=-1-t$이다.

$t=0, 1, \cdots, 9$일 때, 법 10에 대하여 y가 서로 다른 값을 가지게 되고, $s=0, 1$일 때, 법 10에 대하여 x가 서로 다른 값을 가지게 된다. 따라서, 주어진 일차합동식의 일반해는 $x=5s+3t$, $y=-1-t$이다. 단, $s=0, 1$, $t=0, 1, \cdots, 9$이다.

정답: $x=5s+3t$, $y=-1-t$이다. 단, $s=0, 1$, $t=0, 1, \cdots, 9$(난이도 중)

일상 속 과학이야기

예쁜꼬마선충으로 본 동물실험 이야기

국내 연구진이 포유동물 실험을 하지 않고 예쁜 꼬마선충을 대상으로 항암제 독성을 실험하는 기술을 개발했다는 뉴스다. 아직 사용할 수 없는 분야가 더 많겠지만 적어도 항암제 독성 실험에 사용됐던 포유동물의 수를 줄일 수 있을 것으로 기대된다. 지난 2015년 한해 동안 실험에 사용된 동물은 2013년에 비해 37% 증가한 250만 마리에 달했다. 동물실험은 국내 뿐만 아니라 세계적으로 증가하는 추세다. 동물실험의 횟수가 늘 수록 동물애호가를 포함한 많은 사람들이 더 격렬하게 실험에 반대하고 있다. 실제로 동물실험에 대한 찬반 토론은 국내의 많은 학교들이 토론 대회 문제로 선호하는 항목 가운데 하나다. 이번에는 동물실험에 대해 알아보도록 한다.

동물실험의 역사는 고대 그리스시대까지 거슬러 올라간다. 히포크라테스는 동물 해부를 통해 생식과 유전을 설명했고, 아리스토텔레스는 해부학과 발생학을 발전시켰다. 16세기에는 베살리우스가 인체 해부학을 발전시켰는데 그 이전까지 동물 해부는 의학 분야에서 가장 중요한 과목으로 자리 잡았다. 19세기 이후 동물실험은 독성학과 생리학에서 사용되기 시작했다. 우리가 알고 있는 파스퇴르나 파블로프의 실험으로 의학과 생물학은 진일보한다. 이와함께 반대하는 사람들도 늘기 시작했다.

동물실험을 반대하는 입장에서는 늘 효율에 대한 주장을 펼친다. 독일의 입덧 방지약에 들어있던 탈리도마이드라는 물질은 쥐나 개, 고양이에 대한 동물실험에서 아무런 부작용을 일으키지 않았지만 정작 원숭이와 사람에게는 팔이나 다리뼈가 발달하지 않거나 극단적으로 짧은 기형아를 발생시켰다. 백혈병 치료제였던 글리백은 쥐에서는 독성을 보였지만 원숭이와 사람에게는 효과가 있는 걸로 나타났다. 실제로 아스피린과 페니실린 등 많은 의약품이 동물과 인간에게 나타나는 효과가 다르다. 동물실험을 통해 모든 부작용을 정확하게 예측할 수 없기에 실험이 과연 의미가 있는지에 대한 의심이 제기되는 것이다. 여기에 동물과 사람이 공유하는 병이 약 1% 정도로 극히 드물다는 것도 동물실험을 반대하는 중요한 근거다.

동물실험 대체기술 중 하나인 인공피부 [출처:로레알]

동물실험을 찬성하는 측은 완벽하게 대체가 불가능한 기술이라는 점을 꼽는다. 인간이 사용할 약을 실험하려면 인간에게 투약하는 것이 가장 정확하고 명확한 결과를 얻을 수 있지만 그럴 수 없다는 것이다. 물론 목적으로 인간을 대하는 것 자체가 올바른 행위는 아니겠지만 만약 사용하더라도 실험 결과를 얻기까지 너무 많은 시간이 걸리는 것도 동물실험이 불가피하다는 논거가 된다. 컴퓨터를 활용해 시뮬레이션을 해도 수많은 변수를 전부 데이터화할 수 없고, 이로 인해 부작용을 정확하게 예측하기 어렵다. 동물을 사용함으로써 빠른 결과를 얻고, 부작용을 살펴볼 수 있기에 대체 기술이 발명되기 전에는 어쩔 수 없는 실험이라는 주장이다. 이처럼 과학의 발전은 때로는 사회적인 혼란을 불러온다. 올바른 답이 있는 경우도 있지만 대부분은 그렇지 않은 경우가 많다. 어디에 방점을 찍느냐는 언제나 우리의 선택이다. 동물실험에 대해 다시 생각해보고, 과학과 윤리와의 관계를 생각해보는 시간을 갖도록 하자.

전우람 쌤학원 과학팀장