



명진교육 쌤학원
임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>> 문제

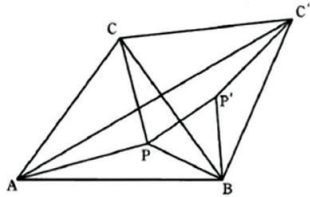
삼각형 ABC에서 세 내각이 모두 120°보다 작을 때, AP+BP+CP가 최소가 되게 하는 점 P가 삼각형 ABC 내부에 유일하게 존재한다. 점 P를 구하여라.

>>>> 임팩트의 강의

기하 분야의 문제이다. 삼각형 ABC에서 각 꼭짓점에 이르는 거리의 합이 최소가 될 때를 묻는 문제이다. 그 점을 페르마포인트라고 한다. 회전변환이 사용되는 대표적인 문제이며 두 꼭짓점을 연결했을 때의 사잇각이 모두 120°가 되는 등각점이 페르마포인트가 된다.

>>>> 문제 풀이

P를 삼각형 ABC의 내부의 임의의 점이라고 하자. △CPB를 점 B를 중심으로 시계방향으로 60°회전시킨 도형을 △C'P'B라고 하자. 그러면, CP=C'P'이다. △PP'B와 △CC'B는 정삼각형이다. 그러므로 BP=PP'이다.



따라서, AP+BP+CP=AP+PP'+P'C'≥AC'이다. 따라서, AP+BP+CP의 최소값은 AC'이다. 즉, P와 P'이 모두 AC' 위의 점이다.

따라서, ∠CPB=∠C'P'B=180°-60°=120°이고, APC'이 직선일 때,

AP+BP+CP가 최소값을 갖는다.

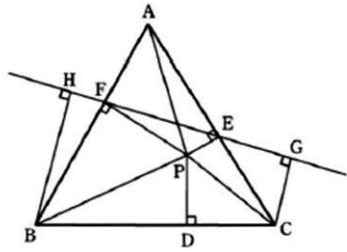
정답: ∠APB=∠BPC=∠CPA=120°을 만족하는 점 P(난이도 중)

>>>> 유사 문제

삼각형 ABC의 변 또는 내부의 점 P에 대하여, P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.

그러면 PA+PB+PC≥2(PD+PE+PF)가 성립하고, 등호는 △ABC가 정삼각형이고, P가 정삼각형 ABC의 중심인 경우에 한하여 성립한다.

여기서, 중심은 무게중심, 내심을 의미한다. 정삼각형에서 무게중심과 내심은 일치한다. 이 정리(에르도스-모텔의 정리)를 증명하여라.



>>>> 문제 풀이

점 B, C에 직선 EF에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하자.

그러면 (1)BC≥HG=HF+FE+EG이다. ∠AFP=∠AEP=90°이므로 제 점 A, F, P, E는 한 원에 위에 있다. 그러므로, 호 AE에 대한 원주각 ∠AFE=∠APE이다. 또, ∠BFH=∠AFE이므로, ∠BFH=∠AFE=∠APE이다. 따라서, △BFH와 △APE는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로 $\frac{HF}{BF} = \frac{PE}{PA}$ 이다.

즉, (2)HF= $\frac{PE}{PA} \cdot BF$ 이다.

같은 방법으로 △CEG와 △APE는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로, $\frac{EG}{CE} = \frac{PF}{PA}$ 이다.

즉, (3)EG= $\frac{PF}{PA} \cdot CE$ 이다.

□AFPE에 톨레미의 정리를 적용하면 PA·EF=AF·PE+AE·PF이다. 즉,

(4)EF= $\frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA}$ 이다. 식 (1)에 (2), (3), (4)를 대입하면

$BC \geq \frac{PE}{PA} \cdot BF + \frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA} + \frac{PF}{PA} \cdot CE$ 이다. 양변에 $\frac{PA}{BC}$ 를 곱하고, 정리하면,

(5) $PA \geq \frac{AB}{BC} \cdot PE + \frac{AC}{BC} \cdot PF$ 이다. 같은 방법으로

(6) $PB \geq \frac{BC}{CA} \cdot PF + \frac{BA}{CA} \cdot PD$, $PC \geq \frac{CA}{AB} \cdot PD + \frac{CB}{AB} \cdot PE$ 이다.

따라서, 식 (5), (6)의 세 부등식을 변변 더하면

$PA + PB + PC \geq \left(\frac{BA}{CA} + \frac{CA}{AB}\right) \cdot PD + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{CB}{AB}\right) \cdot PE + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) \cdot PF$ 이다.

산술-기하평균 부등식에 의하여

$PA + PB + PC \geq 2PD + 2PE + 2PF = 2(PD + PE + PF)$ 이다.

등호는 AB=BC=CA, P가 정삼각형 ABC의 중심일 때, 성립한다.

정답: 증명 (난이도 상)

중등 수학경시 도전하기

>>>> 문제

모든 양의 정수 n에 대하여 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 이 기약분수임을 보여라.

>>>> 임팩트의 강의

정수론 분야의 문제이다. 유클리드 호제법(Euclidean Algorithm)은 다음과 같다. 두 양의 정수 a, b에 대하여

$$b = aq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < a$$

$$a = r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$$

일 때, a, b의 최대공약수는 r_n 이다.

증명: $b = aq_1 + r_1$ 이면 a, b의 약수는 a, r_1 의 약수이다.

따라서, $\gcd(a, b) = \gcd(a, r_1)$ 이다.

마찬가지로, $\gcd(a, b) = \gcd(a, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$ 이다.

>>>> 문제 풀이

$a(14n+3) + b(21n+4) = 1$ 을 만족하는 정수 a, b가 존재함을 보이면 된다. 실제로,

$a=3, b=-2$ 라 두면 모든 양의 정수 n에 대하여, $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$ 이다.

따라서, $21n+4, 14n+3$ 은 서로 소이다.

정답: 증명 (난이도 중)

>>>> 유사 문제

두 자연수 $a=11, 111, 1111$ 과 $b=11, 111, \dots, 111$ (1이 1988개)의 최대공약수를 구하여라.

>>>> 문제 풀이

$b = a(10^{1988} + 10^{1972} + \dots + 10^4) + 1111$, $a = 1111(10^4 + 1) + 0$ 이므로, 유클리드 호제법에 의하여, a와 b의 최대공약수는 1111이다.

정답: 증명 (난이도 하)

>>>> 유사 문제

$\frac{23}{9} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$ 을 만족하는 자연수 a, b, c, d를 구하여라.

>>>> 문제 풀이

풀이1: $23 = 2 \cdot 9 + 5$

a=2

$$9 = 1 \cdot 5 + 4$$

b=1

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

c=1

$$4 = 4 \cdot 1$$

d=4

이다. 즉, a=2, b=1, c=1, d=4이다.

풀이2: 유클리드 호제법에 의하여

$$a=2 \quad \left| \begin{array}{cc|c} 23 & 9 & 1 \\ 18 & 5 & \\ 5 & 4 & 4 \end{array} \right| \quad 1=b$$

$$c=1 \quad \left| \begin{array}{cc|c} 4 & 4 & \\ 1 & 0 & 4 \end{array} \right| \quad 4=d$$

이다. 즉, a=2, b=1, c=1, d=4이다.

정답: a=2, b=1, c=1, d=4 (난이도 하)

>>>> 유사 문제

소수는 무수히 많음을 증명하여라.

>>>> 문제 풀이

귀류법을 사용하여 증명하자. 유한개의 소수 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 만 존재한다고 하자.

다음 수 N을 생각하자. $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

N을 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 으로 나누면, 나머지가 모두 1이다. 그런데, 도음정리 1.39에 의하면, 1보다 큰 모든 정수는 적어도 한 개의 소수의 소수로 나누어 떨어져야 하는데, N은 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 으로 나누어 떨어지지 않으므로 모순이다. 따라서, 소수는 무수히 많다.

정답: 증명 (난이도 하)

일상 속 과학이야기

내 컴퓨터를 납치하는 ‘랜섬웨어’

과학 기술은 나날이 발전하고 있다. 그 중에서도 가장 빠른 속도로 발전하고 있는 분야가 컴퓨터와 통신기술 분야다. 기기의 성능은 더 빨라지고, 크기는 작아지면서 휴대성이 강조된 기기들이 많이 개발되고 있다. 네트워크 환경 역시 좋아지고 있어 우리는 언제 어디서나 인터넷을 통해 전세계의 많은 일들을 접할 수 있다. 이렇듯 통신기기의 의존도가 높아지고 있다. 즉, 우리 삶에서 컴퓨터와 스마트폰의 중요도가 높아지고 있는 것이다. 이런 사실을 잘 알고 있는 사람들 중엔 ‘해커’도 포함되어 있다.



랜섬웨어는 내 컴퓨터를 나도 모르게 암호화한다.

출처:트렌드마이크로

지난 15일 한국에는 랜섬웨어를 조심하라는 문구가 뉴스와 각종 포털 사이트의 메인 화면을 장식했다. 피해 예방법부터 다양한 랜섬웨어를 소개하고 어떤 피해를 입을 수 있는지 알려주는 많은 기사를 볼 수 있었다.

랜섬웨어란 무엇일까? 몸값(Ransom)과 소프트웨어(Software)의 합성어인 랜섬웨어는 기존 사용자와 사용할 수 없도록 시스템을 잠그거나 데이터를 암호화 한 뒤 이를 비밀로 금전을 요구하는 악성 프로그램을 뜻한다. 2005년부터 본격적으로 알려진 랜섬웨어는 2013년을 기점으로 전 세계적으로 급증하고 있는 추세다. 매년 공공기관, 기업, 개인 PC에서 피해사례가 보고되고, 우리나라에서도 피해 사례가 발견되고 있다.

랜섬웨어란 단어에서 볼 수 있듯 가장 큰 특징은 바로 몸값을 요구한다는 점이다. 이는 랜섬웨어의 발달과 아주 큰 연관성이 있다. 랜섬웨어의 초창기 시절에는 암호화 하는 패턴이 단순해서 쉽게 암호를 깰 수 있었고, 복구도 쉬운 편이었기에 크게 문제가 되지 않았다. 하지만 랜섬웨어 자체도 발전하면서 점점 복구가 어려운 형태로 진화하게 됐다. 이런 악성 프로그램을 사용해서 돈을 요구하는 것은 엄연한 불법행위다. 하지만 ‘비트코인’처럼 추적이 어려운 가상화폐의 이용이 활발해 지고있는 환경이 랜섬웨어와 같은 컴퓨터 관련 범죄를 부추기고 있다. 실제로 랜섬웨어가 급증한 시기를 보면 가상화폐의 사용이 증가하는 시기와 비슷한 시기임을 알 수 있다.

지금까지 전세계적으로 알려진 랜섬웨어는 ‘테슬라크립트’, ‘크립트 XXX’, ‘록키’등 다양하다. 지금도 계속 생성되고 있다. 기본적으로 랜섬웨어는 컴퓨터 바이러스로 분류할 수 있다. 랜섬웨어 역시 다른 바이러스 프로그램들처럼 보안이 취약한 일부 홈페이지 접속이나 이메일의 첨부파일 형태로 전파되고 있다. 요즘은 SNS를 통한 감염경로도 발견되고 있어 더 세세한 주의를 요한다. 일단 감염되면 컴퓨터에 있는 데이터들의 암호화 하거나 확장자를 바꾸거나 꼭 필요한 OS관련 프로그램들을 삭제한다. 이렇기 때문에 프로그램을 복구하는 것이 힘든 경우가 많다. 또한 해당 프로그램의 암호를 풀 수 있는 백신 프로그램을 개발해도 해커가 더 발전한 형태의 랜섬웨어를 만들어 내기 때문에 더 깊은 주의가 필요하다.

랜섬웨어는 예방이 가장 중요하다. 중요한 데이터를 자주 백업해 두고, 의심이 되는 이메일이나 프로그램은 내려 받거나 실행하지 않아야 한다. 백신 프로그램과 OS의 업데이트를 자주 하는 것도 랜섬웨어의 피해를 줄이는데 큰 도움이 된다.

전우람 쌤학원 과학팀장



당신의 사업성공을 위해 주목할 파트너

(구)정남프로덕션

제이엔프로!

지난 30여년간 광고마케팅 문화를 선도해 온

중부 이남권 최대의 명문 광고회사입니다.

다년 간 쌓아온 노하우에 시대에 걸맞는 마케팅 전략을 더해

사업성공의 길을 열어 드릴 것입니다.

JNPRO

COMMUNICATIONS