명진교육 쌤학원 임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>>> 문제

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 한다. 연립 방정식 $x^2+ax-y=0$, $bx+y+c=0$이 실수해를 가질 확률을 구하시오.

>>>>> 임쌤의 강의

조합론 분야의 문제이다. 확률을 묻는 문제지만 확률 이론은 중요하지 않다.

확률$=\frac{\text{사건의 가짓수}}{\text{표본공간의 가짓수}}$의 정의에 의해서 간단하게 해결하면 된다. 즉, 경우의 수를 잘 구하면 된다. 물론 확률의 연산 성질을 이용하는 문제, 특이한 발상을 요구하는 문제는 난이도가 높은 문제로 분류된다.

하지만 단순히 경우의 수를 구하는 문제 유형이 수학 내적 이론과 결합되어 출제된다. 방정식의 근의 개수, 함수 분야, 기하 분야의 문제들과 결합된다. 결국은 종합적인 수학 지식이 요구된다. 모든 조합론 문제에서 요구되는 분류하여 해결하는 능력과 어려운 문제는 참신한 발상이 필요하다.

>>>>> 문제풀이

두 식에서 y를 소거하면 $x^2+(a+b)x+c=0$ … ①

①이 실근을 갖지 않을 조건은 $(a+b)^2-4c<0$ 이고

①이 실근을 가지면 y도 실근이다.

$1\le a, b, c\le 6$이므로 $(a+b)^2<4c<24$, $\therefore (a+b)\le 4$

a=b=1 일 때 $1<c$ $\therefore c=2, 3, 4, 5, 6$ 5가지

a=1, b=2 일 때 $\frac{9}{4}<c$ $\therefore c=3, 4, 5, 6$ 4가지

a=2, b=1 일 때 $\frac{9}{4}<c$ $\therefore c=3, 4, 5, 6$ 4가지

a=1, b=3 일 때 $4<c$ $\therefore c=5, 6$ 2가지

a=2, b=2 일 때 $4<c$ $\therefore c=5, 6$ 2가지

a=3, b=1 일 때 $4<c$ $\therefore c=5, 6$ 2가지

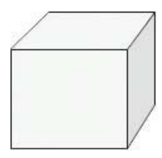
따라서 실근을 갖지 않을 확률은 $=\frac{5+2\times4+3\times2}{6^3}=\frac{19}{216}$

즉 실근을 가질 확률은 $1-\frac{19}{216}=\frac{197}{216}$

정답: $\frac{197}{216}$ (난이도 하)

>>>>> 유사문제1

오른쪽 그림과 같이 큰 정육면체를 크기가 같은 8개의 작은 정육면체로 분할하였다. 모든 꼭짓점 중에서 임의로 세 꼭짓점을 선택하여 선분으로 연결할 때, 삼각형이 만들어질 확률을 구하시오.



>>>>> 문제풀이

꼭짓점은 모두 27개이다. 이 중 세 점을 취하는 방법은 $\frac{27\cdot26\cdot25}{6}$가지 또, 삼각형이 되지 않는 경우는 세 점이 일직선 위에 있는 경우이므로 그 가짓수를 구하면

(i) 각 모서리와 평행하게 세 점을 취할 때 $9\cdot3=27$가지

(ii) 각 면의 대각선 위의 세 점을 취할 때 $9\times2=18$가지

(iii) 공간의 대각선 위의 세 점을 취할 때 4가지

따라서, 만들어지는 삼각형의 총 개수는 $2925-(27+18+4)=2876$

그러므로 삼각형이 될 확률은 $\frac{2876}{2925}$

정답: $\frac{2876}{2925}$ (난이도 하)

>>>>> 유사문제2

주사위를 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 한다. 이 때, 이차함수 $y=(x-a)(x-b)+1$ 의 그래프가 x축과 만날 확률을 구하시오.

>>>>> 문제풀이

$y=x^2-(a+b)x+ab+1$의 그래프가 x축과 만나지 않을 조건은

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$ 즉 $(a-b)^2<4$

$|a-b|<2$ 즉, 두 눈의 차가 2 미만의 경우이다.

㉠ $|a-b|=0$ 일 때, a=b인 경우

(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) ∴ 6가지

㉡ $|a-b|=1$ 일 때, 즉 두 눈의 차가 1인 경우

(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)

∴ 10가지

∴ 구하는 확률은 $1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9}$

정답: $\frac{5}{9}$ (난이도 하)

중등 수학경시 도전하기

>>>>> 문제

두 자리 자연수 n이 있다. 이 n의 십의 자리의 수를 a, 일의 자리의 수를 b라 한다. 이 때, $n=a^2+b^3$을 만족하는 모든 n을 구하시오.

>>>>> 임쌤의 강의

정수론 분야의 문제이다. 부정방정식 문제 유형과 흡사하게 정수의 약배수의 성질을 이용한다. 문제의 난이도가 높을수록 꼼꼼하게 분류하여 모든 경우의 수를 고려해야 한다. 인수분해가 기본이 되며 이차식이면 판별식이 완전제곱식임을 활용한다. 또한 정수를 소인수분해하여 경우의 수를 세보는 것도 한 가지 방법이 된다.

>>>>> 문제풀이

$1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$에서 이 두 자리 정수이므로 $0\leqq b\leqq 4$이다.

a^2의 일의 자리의 수는 1, 4, 9, 6, 5를 갖고, b^3의 일의 자리의 수는 0, 1, 8, 7, 4를 갖는다.

여기서 a^2의 일의 자리의 수와 b^3의 일의 자리의 수를 합한 수의 일의 자리수가 b가 되어야 한다. …(*)

b=0인 경우 (*)를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 없다.

b=1인 경우 (*)를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 없다.

b=2인 경우 (*)를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 (2, 2), (8, 2)뿐이다.

b=3인 경우 (*)를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 (4, 3), (6, 3)뿐이다.

b=4인 경우 (*)를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 없다.

따라서 위 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 (2, 2), (4, 3), (6, 3), (8, 2)의 4개다

그런데 n=22인 경우 $a^2+b^3=2^2+2^3=12\neq22=n$

n=43인 경우 $a^2+b^3=4^2+3^3=43=n$

n=63인 경우 $a^2+b^3=6^2+3^3=63=n$

n=82인 경우 $a^2+b^3=8^2+2^3=72\neq n$

그러므로 우리가 구하는 n은 43과 63뿐이다.

정답: 43, 63(난이도 중)

>>>>> 유사문제

a, b는 자연수이고 a^ab^b은 10^{34}의 배수이지만 10^{35}의 배수는 아니라고 하자. 이것을 만족하는 자연수 쌍 (a, b)중에서 a+b의 값이 최소인 것을 구하시오.

>>>>> 문제풀이

a^ab^b이 10의 거듭제곱의 배수가 되기 위해서는 a, b는 2와 5를 소인수로 가져야 하므로

$a=2^{a_2}\times5^{a_5}\times x$ (단, $\gcd(2, x)=\gcd(5, x)=1$)

$b=2^{b_2}\times5^{b_5}\times y$ (단, $\gcd(2, y)=\gcd(5, y)=1$)라 놓자.

그러면 $a^a\times b^b=2^{a_2a+b_2b}\cdot5^{a_5a+b_5b}$이고, 문제의 조건으로부터 $\min a_2a+b_2b, a_5a+b_5b=34$이다.

그런데 a가 5의 배수이면 $5|a_5a$이고, a가 5의 배수가 아니면 $a_5=0$이므로 $5|a_5a$이다.

마찬가지로 $5|b_5b$이고, 따라서 $5|a_5a+b_5b$ 이다.

그러면 $a_5a+b_5b\neq34$이므로 $a_5a+b_5b>34$, $a_2a+b_2b=34$ …… (1)이다.

그런데 a, b가 모두 5를 약수로 가지면 $5|a_2a+b_2b$이므로 $a_2a+b_2b\neq34$이다. 따라서 a, b중 하나는 5를 약수로 가지지 않는다. 일반성을 잃지 않고 $a_5\geqq1$, $b_5=0$이라 하자.

그러면 $a=2^{a_2}\times5^{a_5}\times x$, $b=2^{b_2}\times y$ 이고,

(1)에서 $a_2a+b_5b=a_5a>34$이고, $a_2a\leqq34$가 되어 $a_2<a_5$ …… (2)이다.

여기서 다음 두 가지 경우를 생각해보자.

(경우1) $a_2\geqq1$인 경우 : (2)에서 $a_5\geqq2$이고,

$a=2^{a_2}\cdot5^{a_5}\cdot x$, $b=2^{b_2}\cdot y$, $a^a\cdot b^b=2^{a_2a+b_2b}\cdot5^{a_5a}\cdot x^ay^b$이다.

그러면 $a_2a=a_2(2^{a_2}\cdot5^{a_5}\cdot x)\leqq34$ 그런데 $a_2\geqq1$, $a_5\geqq2$이므로

$a_2a=a_2(2^{a_2}\cdot5^{a_5}\cdot x)\geqq50x>34$가 되어 모순이다. 따라서 $a_2\geqq1$인 경우는 문제의 조건에 맞는 자연수 a, b가 존재하지 않는다.

(경우2) $a_2=0$인 경우 : $a=5^{a_5}\cdot x$, $b=2^{b_2}\cdot y$ 이고, $a^a\cdot b^b=2^{b_2b}\cdot5^{a_5a}\cdot x^ay^b$

(1)에서 $b_2b=b_2(2^{b_2}\cdot y)=34=2\times17$이므로 $b_2=1$, $y=17$, b=34이다.

이제 a를 구해보자.

x는 2, 5와 서로소이고 (1)에서 $a_5a=a_5(5^{a_5}\cdot x)>34$, (2)에서 $a_5\geqq1$이다.

$a_5=1$일 때 $a_5a=5x>34$ 이어야 하므로, $x\geqq7$이고, $a=5\times7, 8\times9, 8\times11, \cdots$

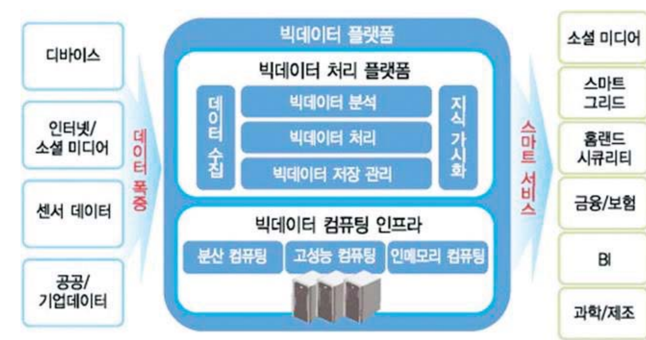
$a_5\geqq2$이면 $a_5a\geqq2(5^2\cdot x)=50x>34$이어야 하므로 $x\geqq1$이고, $a=5^2\times1, 5^2\times3, \cdots, 5^3\times1, 5^3\times3, \cdots$, 따라서, $a_2=0$인 경우 a+b의 값이 최소인 경우는 b=34, a=25일 때이다. 즉, (a, b)=(25, 34) 또는 (34, 25)이다.

정답: (a, b)=(25, 34) 또는 (34, 25)(난이도 상)

일상 속 과학이야기

구술을 꿰어서 보배로 만들다 '빅데이터'

'구슬이 서 말이라도 꿰어야 보배다'라는 속담을 들어본 적 있는가? 이 속담은 좋은 것이 많이 있어도 다듬고 정리하여 쓸모 있게 만들어 놔야 우리에게 값어치가 있음을 비유하고 있는 속담이지만 내 생각엔 빅데이터에 대해서 가장 잘 설명하고 있는 속담이라고 생각한다. 요즘 우리는 빅 데이터란 말을 자주 접하고 있다. 실제로 빅 데이터는 아주 넓은 분야에서 다양하게 사용되고 있고 많은 사람들의 관심을 받고 있다. 몇 년 전에는 이름조차 생소했던 빅 데이터 전문가란 직업이 생겼고 이 전문가들이 여러 TV 프로그램에서 정보를 전달하는 것이 흔한 일이 되었다. 이런 점만 보더라도 빅 데이터란 분야가 얼마나 빠르고 크게 성장하고 있는지를 알 수 있다.



빅 데이터란 사실 우리가 디지털 환경에 남기는 모든 흔적들을 말하는 것이다. 우리는 하루에도 수 십 번씩 인터넷 포털 사이트를 통해 원하는 정보를 검색하고 좋아하는 영상을 보고 자신의 의견을 쓰며 타인의 생각에 자신의 생각을 이야기하기도 한다. 문장으로 나열하면 매우 거창하지만 사실 우리가 인터넷이란 디지털 환경을 통해 하고 있는 일상적인 모습들이다. 심심하면 스트리밍 사이트들을 통해 영상을 보고 오늘 점심에 먹은 메뉴를 자신의 SNS에 올리기도 한다. 다른 사람의 SNS에서 정보를 얻기도 하고 그에 대한 대답을 하기도 하며 포털 사이트를 통해 뉴스와 가십 거리를 접하기도 한다. 이렇게 하루에도 수 십 번씩 디지털 환경에서 우리는 수많은 흔적들을 남기고 있다. 그리고 이런 흔적들은 조금만 노력해도 쉽게 수집할 수 있다. 하지만 문제는 그 흔적들의 양이 너무 많다는 것이다. 즉 자료는 넘쳐나지만 그 와중에 우리가 사용할 수 있고 우리에게 유용한 정보를 찾는 것은 별개인 것이다.

빅 데이터는 이런 자료를 정보로 만들어 주고 있다. 우리가 주변에서 가장 쉽게 볼 수 있는 빅 데이터 적 접근이 바로 포털 사이트에서 쉽게 볼 수 있는 연관 검색어이다. 우리가 어떤 사물에 대해 검색하거나 그에 대한 자신의 생각을 SNS 상에 적을 때 그 사건에 대해서 사실만을 적는 경우는 거의 없다. 자신의 생각이나 주변의 반응을 같이 적게 되고 그와 관련 있었던 다른 사건들을 나열하게 되는 것이다. 이렇게 한 사건에 대해 각자 다른 의견과 관련 사실이 기재되게 되고 우리는 한 사건에 대한 여러 시각을 찾아 볼 수 있게 된다. 그래서 어떤 한 사건이나 사물, 인물에 대한 평판, 평가 등 다양한 정보를 여러 경우에 대해 알 수 있게 되고 그것은 곧 여론과 같은 힘을 가진 정보가 되는 것이다.

과학 기술의 발달로 생성되는 빅 데이터의 종류와 양이 방대하게 많아지고 있다. 우린 아마 우리가 좋아하는 영화를 컴퓨터에게 추천받을 것이며 우리가 좋아하는 음식을 핸드폰으로 권유 받게 될 것이다. 이미 가능한 기술이고 이미 현실이 된 기술이다. 물론 개인의 사생활 침해와 개인 정보 유출과 같은 문제점들도 있지만 우리의 삶을 편하게 해줄 기술임에는 틀림없다. 기술이 나쁜 것은 아니다. 기술을 이용하는 사람이 문제인 것이다. 빅 데이터를 효과적으로 잘 이용할 수 있다면 아마 세상은 좀 더 많은 가치들을 나눌 수 있는 평화로운 세상이 오지 않을까 생각해 본다. 정보가 힘인 세상은 이미 우리 곁에 와 있다. 그리고 그 힘을 우리는 평화롭게 사용해야 한다. 인류의 발전을 위해서 말이다.

전우람 쌤학원 과학팀장