



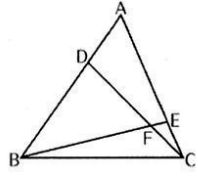
명진교육 쌤학원
임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>> 문제

그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AD}:\overline{DB}=1:2$, $\overline{AE}:\overline{EC}=3:1$ 이다.
 $\overline{BE}=12$ 일 때, $\overline{EF}$ 의 길이를 구하여라.

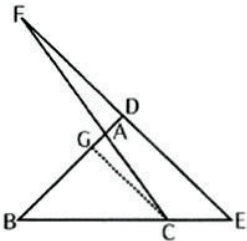
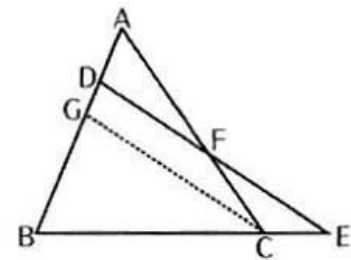


>>>> 임팩트의 강

기하 분야의 문제이다. 답을 이용하여 선분의 길이의 비를 구하는 문제이다. 평행선과 선분의 길이 사이의 비를 잘 구하면 된다. 보조선을 잘 잡는 게 핵심 포인트가 되겠다. 또한 이 문제는 메넬라우스 정리를 이용하면 바로 해결할 수 있다. 하지만 경시준비를 준비하는 학생들은 이 정리를 여러 번 접해보았겠지만 실전에 자신 있게 적용하는 학생들은 많지 않은 듯하다. 이번 기회에 메넬라우스 정리를 이해하고 자유자재로 구사할 수 있도록 해보자. KMO나 IMO를 준비하는 학생들은 반드시 익혀야 한다.

[메넬라우스 정리]

$\triangle ABC$ 에 대하여 하나의 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 또는 그 연장선을 자르는 점을 각각 D, E, F라고 하면 $\frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} = 1$ 이 성립한다.



[증명]

점 C를 지나 $\overline{DE}$ 에 평행인 선분을 긋는다.

$$\frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{GD}{DE} = 1 (\because \overline{BE}:\overline{EC}=\overline{DB}:\overline{GD}, \overline{CF}:\overline{FA}=\overline{GD}:\overline{AD})$$

메넬라우스 정리의 내용과 증명은 위와 같다. 하지만 학생들은 많은 혼동을 느끼는 것 같다. 다음과 같은 두 원칙을 지키면서 잘 외워서 문제에 적용하길 바란다.

먼저 메넬라우스 정리를 적용할 삼각형과 삼각형을 자르는 직선을 잡는다.

제1원칙 : 분자의 시작점을 삼각형의 한 꼭짓점으로 잡는다. 그리고 끝점도 시작점이 된다.

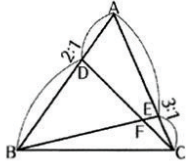
제2원칙 : (삼각형의 한 꼭짓점 → 잘린 점 → 삼각형의 한 꼭짓점 → 잘린 점 → ... → 잘린 점 → 삼각형의 한 꼭짓점)의 순서로 점을 잡는다.

>>>> 문제 풀이

$\triangle ABE$ 를 직선 $\overline{CFD}$ 로 자른다고 생각하면 $\frac{BF}{FE} \times \frac{EC}{CA} \times \frac{AD}{DB} = \frac{BF}{FE} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$ 에서 $\overline{BF}:\overline{FE}=8:1$ 이다.

그리고 $\overline{BE}=12$ 일 때, $\overline{EF}=\frac{1}{1+8} \times 12 = \frac{4}{3}$ 이다.

정답: $\frac{4}{3}$ (난이도 하)



>>>> 유사 문제

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BD}=2\overline{CD}$, $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FD}$ 이다. $\overline{BE}$, $\overline{BF}$ 의 연장선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 G, H라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) $\overline{GC}$ 를 b를 이용한 식으로 나타내어라.
- (2) $\overline{HC}$ 의 길이를 b를 이용한 식으로 나타내어라.
- (3) $\overline{AG}:\overline{GH}:\overline{HC}$ 를 가장 간단한 정수의 비로 나타내어라.

>>>> 문제 풀이

(1) 메넬라우스 정리에 의하여 ($\triangle ADC$ 를 직선 $\overline{BEG}$ 로)
 $\frac{AG}{GC} \times \frac{CB}{BD} \times \frac{DE}{EA} = \frac{AG}{GC} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 1$

$$\overline{GC} = \frac{3}{4} \overline{AC} = \frac{3}{4} b$$

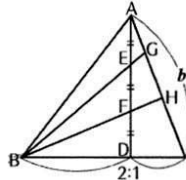
(2) 메넬라우스 정리에 의하여 ($\triangle ADC$ 를 직선 $\overline{BFH}$ 로)

$$\frac{AH}{HC} \times \frac{CB}{BD} \times \frac{DF}{FA} = \frac{AH}{HC} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 1. \overline{HC} = \frac{3}{7} \overline{AC} = \frac{3}{7} b$$

(3) (1), (2)에 의해서 $\overline{AG} = \frac{7}{28} b$, $\overline{HC} = \frac{12}{28} b$, $\overline{GH} = \frac{9}{28} b$

$$\therefore \overline{AG}:\overline{GH}:\overline{HC}=7:9:12$$

정답: (1) $\frac{3}{4} b$ (2) $\frac{3}{7} b$ (3) 7:9:12 (난이도 하)



중등 수학경시 도전하기

>>>> 문제

검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

●● ●○ ○● ○○
<A형> <B형> <C형> <D형>으로 4가지이다.

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타내도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 그림과 같이 5이다. 10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타내도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는? (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

●●○●●●
○●○●○●○
○●○●●●○
●●●○●○●
●○●○●●●

>>>> 임팩트의 강

조합론 문제이다. 중복조합으로 해결하는 게 가장 빠른 방법이다. 조합의 원리로도 해결가능 하지만 결국 중복조합에 대한 수학적 문제로 귀결된다.

즉, 서로 다른 n개의 숫자에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_nH_r$ 는 각 조합의 첫 번째, 두 번째, ..., r번째 숫자에 각각 0, 1, 2, ..., r-1을 더하여 생긴 서로 다른 (n+r-1)개의 숫자에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n+r-1}C_r$ 와 같다. 즉, ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다. 경시수학, 영재고 입시에서 원리적 방법에 의한 문제 해결이나 창의적 문제 해결력을 요구하고 있기는 하지만 현실적으로 학습에 의한 문제의 풀이도 무시할 수는 없다. '아는 만큼 보인다.'는 일상의 진리가 입시에서도 통한다.

>>>> 문제 풀이

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○●○ 또는 ○●○●○●

(i) ●○●○●○인 경우 1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로 ${}_2C_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 30$

(ii) ○●○●○●인 경우 같은 방법으로 ${}_3C_1 \times {}_2H_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_4 = 15$

따라서 (i), (ii)에 의하여 경우의 수는 45

정답: 45 (난이도 상)

>>>> 유사 문제 1

다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는?

(가) 각 자리의 수의 합은 14이다.
(나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

>>>> 문제 풀이

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w 라 하면 $x+y+z+w=14$

x, y, z, w가 모두 홀수이므로 $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$ (단 a, b, c, d는 0 이상 4 이하의 정수)

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14 \quad a+b+c+d=5$$

a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 a, b, c, d는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

$${}_4H_5 - 4 = {}_{4+5-1}C_5 - 4 = {}_8C_5 - 4 = \frac{8!}{5!3!} - 4 = 52$$

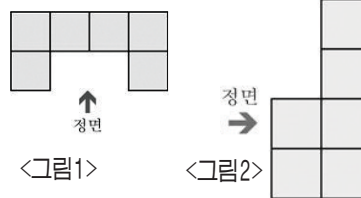
정답: 52 (난이도 중)

>>>> 유사 문제 2

크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 <그림1>

정면을 기준으로 오른쪽 옆에서 본 모양이 <그림2>

와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.)



>>>> 문제 풀이

입체도형의 형태를 추론하고 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

1층에 6개를 모두 쌓은 후 남은 6개를 쌓는 방법은 다음과 같다.

i) 2층 앞줄에 모두 1개씩 쌓는 경우 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$

ii) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우 뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로 ${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3H_2 = 48$

따라서 $12+48=60$

정답: 60 (난이도 중)

일상 속 과학이야기

달! 쟁반같이 둥근달?

아주 귀여운 슈퍼문 인형이 석촌호수에서 사라지고 2016년 11월 14일 68년 만의 슈퍼문이 관측되었다. 평소보다 밝고 크게 보이는 보름달을 우리는 슈퍼문이라고 부르고 있는데 사실 천문학에서 사용하는 용어는 아니다. 1979년 한 점성술사



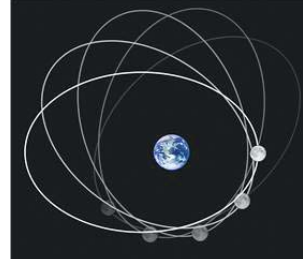
사진출처: 네이버 카페

에 의해 불리게 된 단어가 지금 우리가 사용하고 있는 단어이다. 그렇다면 천문학에서는 슈퍼문은 무엇이라고 부를까?

모든 행성과 위성은 원운동을 한다. 하지만 완벽한 원의 궤도를 도는 것은 아니고 타원 궤도를 돌게 된다. 타원은 두 고정된 점 사이의 거리의 합이 일정한 점의 자취를 타원이라고 부르는데 이 고정된 두 점을 우리는 흔히 초점이라고 부른다.

이 두 초점 중 한 초점의 위치에 지구의 경우에는 태양이, 달의 경우에는 지구가 위치하고 있다.

그래서 타원 궤도를 도는 달은 지구와의 거리가 달의 위치에 따라 달라지게 된다. 그래서 지구와 달이 가장 가까운 점은 근지점이라 부르고 가장 멀리 있을 때는 원지점이라고 부르게 된다. 근지점에 있을 때는 당연히 달이 가까이에 있으니 지구에서 관측했을 때 크고 밝게 보일 것이고 원지점에 있을 때에는 근지점에 있을 때보다 작고 어둡게 보이게 될 것이다. 우리는 근지점에 있는 크고 밝은 보름달을 슈퍼문이라고 부르고 원지점에 있는 상대적으로 작고 어두운 달을 미니문이라고 부른다. 슈퍼문은 미니문보다 30%정도 더 밝고 13%정도 더 크게 보인다.



사진출처: 위키백과

그냥 마냥 달이 밝기만 한 것이 아니다. 달이 가까워졌으니 달의 인력이 강해져 이 기간에는 바닷물의 조수간만의 차도 최대치를 이루게 된다. 물론 느끼기는 어렵겠지만 슈퍼문이 뜨는 밤에는 몸무게도



사진출처: 네이버 매거진

적게 나가고 또 평소보다 높고 멀리 뛸 수도 있다. 우리와 가까이 있는 천체기에 이렇게 다양한 중력적 변화를 만들어 낼 수 있는 것이다.

우리는 달의 운동에 대해서 많이 알고 있다. 지구에 사는 동안 달의 한 쪽면만 볼 수 있다는 것은 널리 알려진 사실일 것이다.

달의 공전 속도와 자전하는 속도가 같기 때문에 달이 한바퀴 자전하는 동안 지구를 한바퀴 공전하기 때문에 지구에서 보이는 달은 늘 같은 면이 보인다는 것이다.

하지만 우리가 잘 모르는 사실 중 하나는 달의 앞면이 매일 같은 것이 아니란 것이다. 달의 앞면은 매일 조금씩 다르다. 달이 자전하고 공전하면서 지구와의 상대적 움직임이나 여러 이유로 달의 자전하는 속도에 차이가 생기는 듯이 보이게 된다. 천문학에서는 그런 차이를 발생시키는 운동을 칭동이라고 부른다. 달의 궤도가 타원이라 발생하는 경도 칭동, 달과 지구의 기울기 차에서 발생하는 위도 칭동, 지구의 자전 때문에 생기는 일주 칭동의 3가지 칭동 운동이 존재한다. 이 3가지 칭동운동이 달의 앞면에 조금씩 차이를 만든다. 그래서 우리가 실제로 볼 수 있는 달의 앞면은 정확한 절반 50%가 아닌 전체 면적에 59% 정도를 볼 수 있다.

달은 1년에 약 3.8cm씩 멀어지고 있다. 공룡이 살았던 시기에는 지금의 달보다도 훨씬 큰 달이었을 것이다. 늘 똑같이 보이는 달이지만 사실 매일 새로운 달을 우리는 보고 있는 것이다. 오늘 밤의 달은 어제와 어떻게 다른지 한번 관찰해 보자!

전우람 쌤학원 과학팀장



당신의 사업성공을 위해 주목할 파트너

(구)정남프로덕션
제이엔프로!

지난 30여년간 광고마케팅 문화를 선도해 온

중부 이남권 최대의 명문 광고회사입니다.

다년 간 쌓아온 노하우에 시대에 걸맞는 마케팅 전략을 더해

사업성공의 길을 열어 드릴 것입니다.

JNPRO
COMMUNICATIONS