



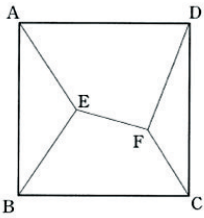
명진교육 쌤학원
임경원 부원장의

상위 1% 수학

영재고 도전하기

>>>> 문제

아래의 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 내부에 점 E와 F를 잡을 때, $AE+EB+EF+DF+FC$ 의 최솟값을 구하여라.

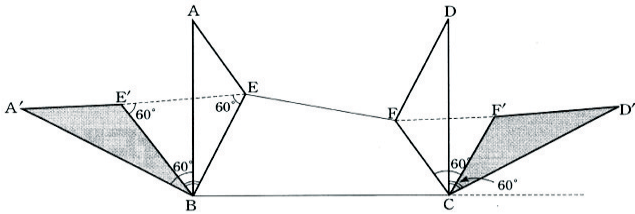


>>>> 입시의 강의

기하분야의 문제이다. 지난주에 이어지는 최단거리 문제이다. 이번 주에는 평행이동, 대칭이동이 아닌 회전이동을 해야 하는 문제이다. 제시한 두 문제 모두 해석학적인 접근은 바람직하지 하지 않다. 정답률이 높지 않은 문제이다. 하지만 빈번하게 출제되는 문제이며 회전이동이 필요하다는 발상만 있었으면 쉽게 접근이 가능하다. 보통은 60° 의 각도로 회전 이동을 한다. 60° 로 회전이동하게 되면 세 변의 길이가 모두 같은 정삼각형이 나오기 때문이다. 역시 회전 이동을 하게 되면 원래 도형과 변환된 도형은 합동이다. 역시 마지막으로는 삼각부등식에 의해 고정된 두 점사이의 직선거리가 최단거리가 된다. 항상 유사한 도형문제를 접할 때, 세 가지 변환(평행, 대칭, 회전)을 반드시 유념하기를 바란다.

>>>> 문제 풀이

[기하] 다음 그림과 같이 $\triangle AEB$ 와 $\triangle DFC$ 를 각각 좌, 우로 60° 씩 회전하면 다음 그림과 같다.



$AE+EB=A'E'+E'B=A'E'+E'E$,
 $DF+FC=D'F'+F'C=D'F'+F'F$

이므로

$AE+EB+EF+DF+FC = A'E'+E'E+EF+F'F'+F'F'$

따라서 주어진 문제는 '고정된 두 점 A', D'으로부터 A'E'+E'E+EF+F'F'+F'F'의 값이 최소가 되도록 두 점 E, F를 사각형 내부에 정하는 문제'로 바꾸어 생각할 수 있다.

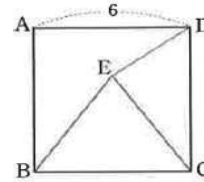
한편, 네 점 E', E, F, F'이 모두 A'D' 위의 점이고, $\angle AEE' = 60^\circ$, $\angle DEF' = 60^\circ$ 를 만족할 때, 주어진 길이의 최솟값은 A'D'이므로 아래의 그림에서 A'D'의 길이를 구하면

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 1 = \sqrt{3} + 1$
이 된다.

정답: $\sqrt{3} + 1$ (난이도상)

>>>> 유사 문제

그림은 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD이다. $\square ABCD$ 의 내부의 한 점을 E라 할 때, $(BE+CE+DE)^2$ 의 최솟값을 구하여라.



>>>> 문제 풀이

그림과 같이 $\triangle CDE$ 를 점 C를 중심으로 시계 방향으로 60° 회전이동하면 $\triangle CFG$ 가 되고 $\triangle CGE$ 는 정삼각형이 된다.

$\therefore BE+CE+DE=BE+EG+GF \geq BF$

따라서 $(BE+CE+DE)^2$ 의 최솟값은 BF^2 이다.

점 F에서 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $CF=CD=6$,

$\angle BCF = \angle BCD + \angle DCF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ 이므로

$\angle FCH = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$\triangle FCH$ 에서 $FH=3$, $CH=3\sqrt{3}$

$\therefore BF^2 = (BC+CH)^2 + (FH)^2 = (6+3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 72+36\sqrt{3}$ 이다.

정답: $72+36\sqrt{3}$ (난이도중)

중등 수학경시 도전하기

>>>> 문제

$1 \leq x \leq y \leq z \leq 4$ 를 만족하는 임의의 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1)^2 + (\frac{y}{x}-1)^2 + (\frac{z}{y}-1)^2 + (\frac{4}{z}-1)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

>>>> 입시의 강의

대수 분야의 문제이다. 코시-슈바르츠 부등식과 산술기하의 절대부등식을 이용하는 문제이다. 경시수학에서 반드시 출제된다고 생각하고 준비해야 하는 내용이다. 위에 제시한 문제는 코시-슈바르츠 부등식과 산술기하의 절대부등식을 적재적소에 적용해야 풀리는 문제이다.

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ (a, b, x, y 는 실수, 등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 일 때, 성립한다.)

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ (a, b, c, x, y, z 는 실수, 등호는

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ 일 때, 성립한다.)

위의 두 부등식이 코시-슈바르츠 부등식의 가장 간단한 대수식이다. 증명방법은 다양한 방법이 있으며 위의 두 부등식은 사칙연산만으로도 간단하게 증명된다. 다른 수학 분야에서도 또 다른 형태로 표현된다. 또한 산술기하의 기하적인 증명 방법은 자주 출제되었으며 아래의 유사문제1에 제시하였다. 자유자재로 적용할 수 있도록 연습해야 하는 문제 유형이며 고난이도 문제까지도 반드시 풀어내야 한다.

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ ($x>0, y>0$ 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.)

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ($x>0, y>0, z>0$ 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립한다.)

위의 두 부등식이 산술기하의 절대부등식의 간단한 대수식이다. 위의 두 부등식은 대수적으로 간단하게 증명된다. 일반적으로 산술기하의 절대부등식으로 풀리는 문제들은 코시-슈바르츠 부등식으로도 해결가능하다. 또한 산술기하의 기하적인 증명 방법은 자주 출제되었으며 아래의 유사문제1에 제시하였다. 자유자재로 적용할 수 있도록 연습해야 하는 문제 유형이며 고난이도 문제까지도 반드시 풀어내야 한다.

>>>> 문제 풀이

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)((x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2)$

$\geq ((x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2)$ 이다.

또한, 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여 다음의 부등식이 각각 성립한다.

$x+\frac{y}{x} \geq 2\sqrt{x}, \frac{y}{y}+\frac{4}{z} \geq \frac{4}{\sqrt{y}}, 2\sqrt{y}+\frac{4}{\sqrt{y}} \geq 4\sqrt{2}$

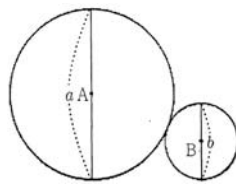
따라서, $((x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2) \geq \frac{1}{4}(4\sqrt{2}-4)^2 = 4(\sqrt{2}-1)^2$ 이다.

그리고 등호는 $x=\sqrt{2}, y=2, z=2\sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 최솟값은 $4(\sqrt{2}-1)^2$ 이다.

정답: $4(\sqrt{2}-1)^2$ (난이도중)

>>>> 유사 문제 1

그림과 같이 중심이 A이고 지름의 길이가 a인 원과 중심이 B이고 지름의 길이가 b인 원이 서로 외접한다. 그림을 이용하여 $a \geq b > 0$ 일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 가 성립함을 증명하시오.



>>>> 문제 풀이

AB는 두 원의 반지름의 합이므로 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

두 원의 공통외접선과의 교점을 각각 C, D라 하고, 점 B에서 점 C를 지나는 지름에 내린 수선의 발을 E라고 하면 $CE=BD$ 이므로 $AE=AC-CE=\frac{a+b}{2}$ 이다.

$\therefore BE = \sqrt{AB^2-AE^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$ 이다.

$AB \geq BE$ 이므로 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이다

>>>> 유사 문제 2

한 변의 길이가 1cm인 직사각형 ABCD를 서로 수직인 두 직선으로 나누어 4개의 작은 직사각형을 만들 수 있다. 그 중 세 개의 직사각형의 넓이는 1cm²보다 작지 않고, 나머지 한 개의 직사각형의 넓이는 2cm²보다 작지 않다고 한다. 이 직사각형의 다른 한 변의 길이 x의 최솟값을 구하여라.

>>>> 문제 풀이

이 문제는 코시-슈바르츠 부등식, 산술기하평균의 절대부등식 둘 다 풀이가 가능한 문제이다. 코시-슈바르츠 부등식을 이용한 풀이이다.

$a>0, b>0, a+b=1, c>0, d>0, c+d=x$

$x=(a+b)(c+d) \geq (\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2 \geq (1+\sqrt{2})^2$

정답: $(1+\sqrt{2})^2$ (난이도 상)

일상 속 과학이야기

VR(가상현실)과 시차

얼마 전부터 많은 회사들이 경쟁적으로 VR기기란 기계를 앞다투어 출시하고 있다. VR이란 것은 Virtual Reality의 약자로 가상현실을 뜻한다. 가상현실은 특수한 장비를 이용하여 인간의 시각, 청각 등의 감각을 사용하여 컴퓨터의 프로그램 내부에서 가능한 것을 인간이 현실인 것처럼 체험할 수 있게 해주는 기술을 말하는데 그러므로 가상현실 기술을 이용하기 위해서는 특수한 장비들이 필요하다.

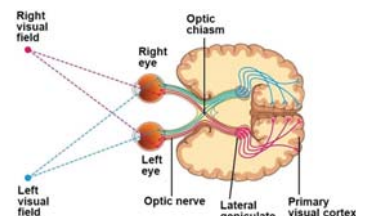


사진출처: 네이버 포스트

고글을 착용하고 가상의 세계 속으로 들어가 눈 앞에 보이는 적들을 물리치기도 하고 급급한 환자를 치료해 볼 수도 있고 가상의 쇼핑물에 들어가 매장을 구경해 볼 수도 있는 것이 바로 가상현실이다. 이제 시작하는 단계로서 앞으로 더 많은 분야에서 활용되고 더 많이 발전할 이 기술에는 어떤 과학적 원리를 찾아볼 수 있을까? 이 가상세계 속에서 생활하고 조금 더 현실 같은 가상현실을 만들기 위해서는 우리는 먼저 몸의 감각기관에 대해서 알아야 한다. 그리고 다양한 감각기관 중에서 오늘은 시각에 대한 이야기를 해보려고 한다.

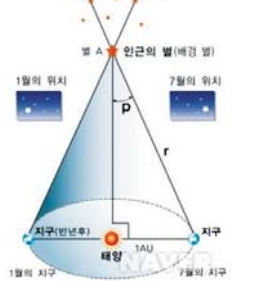
가장 먼저 고글을 사용하여 우리는 화면을 볼 수 있다. 하지만 일반적인 컴퓨터 모니터나 TV 화면과 다르게 입체적인 화면을 봐야 한다. 그렇다면 우리는 어떻게 사물을 입체적으로 볼 수 있을까? 바로 사람의 눈이 2개가 있기 때문에 가능한 일이다.

위의 그림처럼 오른쪽 눈에 보이는 화면은 왼쪽의 뇌가, 왼쪽 눈으로 보이는 화면은 오른쪽의 뇌가 장면을 해석한다. 당연히 오른쪽 눈으로 보이는 화면과 왼쪽의 눈으로 보이는 화면이 다를 것이고 우리는 그 화면의 차이를 시차라 부르고 있다. 그 화면의 차이를 우리의 뇌가 계산해서 화면을 하나로 만들며 우리의 몸과 물체사이의 거리를 알 수 있게 해주는 것이다. 그래서 눈병이나 눈을 다쳐 안대를 한 사람이 거리를 잘 구분할 수 없는 이유가 바로 여기에 있다. 이 시차를 이용하여 우리는 눈앞에 있는 물체와의 가까운 거리뿐만 아니라 지구에서 보이는 별까지의 아주 먼 거리도 구할 수 있다. 위의 그림처럼 지구가 태양을 공전하는 동안 별이 다른 배경의 별들과 이루는 상대적 위치차이를 이용해 별의 거리를 구하는 것이다.



사진출처: 네이버 블로그

위 그림에서 보면 1월의 지구와 7월의 지구의 위치가 각각 우리의 오른쪽, 왼쪽 눈의 역할을 하게 되는 것을 알 수 있다. 우리는 어떻게 별이 6개월간 이동한 각도의 절반을 연주시차라고 부르고 있고 보통 가까운 별의 거리를 구할 때 사용하고 있다.



사진출처: 네이버 학색백과

그렇다면 우리는 어떻게 화면에 오른쪽 눈과 왼쪽 눈에 보이는 화면을 다르게 만들 수 있을까? 가장 쉬운 방법은 왼쪽 눈에 보이는 화면과 오른쪽에 보이는 화면을 구분하여 영상을 재생하면 가능하다.

많은 VR 고글들이 오른쪽 왼쪽 눈에 다른 영상을 재생할 수 있게 독립적 화면을 가지고 있다. 컴퓨터 그래픽은 날로 날로 발전하고 있다. 이제 화면을 보고 그래픽인지 실제 사진인지 구분하기 힘든 세상이 되고 있는 것이다. 날로 발전하는 컴퓨터 그래픽 기술과 그리고 영상기술 또한 다양한 센서기술들의 발전으로 우리는 더욱 더 실감나는 가상현실을 즐길 수 있게 될 것이다. 상상만 하던 것들을 가상현실에서 이를 수 있을 것이다. 앞으로 발전할 이 기술을 더 눈여겨 보고 관심을 가져보도록 하자.

전우람 쌤학원 과학팀장



당신의 사업성공을 위해 주목할 파트너

(구)정남프로덕션
제이엔프로!

지난 30여년간 광고마케팅 문화를 선도해 온

중부 이남권 최대의 명문 광고회사입니다.

다년 간 쌓아온 노하우에 시대에 걸맞는 마케팅 전략을 더해

사업성공의 길을 열어 드릴 것입니다.

JNPRO
COMMUNICATIONS